Den 31a Nordiska matematiktävlingen

Måndagen den 3 april 2017

Svensk version

Skrivtid: 4 timmar. Varje problem är värt 7 poäng.
Enda tillåtna hjälpmedel är skriv- och ritdon.

Problem 1 Låt n vara ett positivt heltal. Visa att det finns positiva heltal a och b sådana att:

$$\frac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1} = n^2 + n + 1.$$

Problem 2 Låt a, b, α, β vara reella tal sådana att $0 \leq a, b \leq 1$, och $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Visa att om

$$ab \cos(\alpha - \beta) \leq \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)},$$

så gäller

$$a \cos \alpha + b \sin \beta \leq 1 + ab \sin(\beta - \alpha).$$

Problem 3 Låt M och N vara mittpunkterna på sidorna AC och AB, respektive, i en spetsvinklig triangel ABC, $AB \neq AC$. Låt ω_B vara cirkeln med medelpunkt i M som går genom B, och låt ω_C vara cirkeln med medelpunkt i N som går genom C. Låt punkten D vara sådan att $ABCD$ är ett likbent parallelltrapets med AD parallell med BC. Antag att ω_B och ω_C skär varandra i två olika punkter P och Q. Visa att D ligger på linjen PQ.

Problem 4 Bestäm alla heltal n och m, $n > m > 2$, sådana att en regelbunden n-hörning kan skrivas in i en regelbunden m-hörning so att alla n-hörningens hörn ligger på m-hörningens sidor.