Den 31. nordiske matematikkonkurransen

Mandag 3. april 2017

Norsk versjon (bokmål)

Oppgavene skal løses på 4 timer. Du får opptil 7 poeng på hver oppgave.
Skrive- og tegneredskaper er eneste tillatte hjelpemidler.

Oppgave 1 La n være et positivt heltall. Vis at det finnes positive heltall a og b slik at

$$\frac{a^2+a+1}{b^2+b+1} = n^2+n+1.$$

Oppgave 2 La a, b, α, β være reelle tall slik at $0 \leq a, b \leq 1$, og $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Vis at dersom

$$ab\cos(\alpha-\beta) \leq \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)},$$

holder også

$$a\cos\alpha + b\sin\beta \leq 1 + ab\sin(\beta-\alpha).$$

Oppgave 3 La M og N være midtpunktene på sidene AC henholdsvis AB i den spissvinklede trekanten ABC, der $AB \neq AC$. La videre ω_B være sirkelen med sentrum i M som går gjennom B, og ω_C sirkelen med sentrum i N som går gjennom C. La punktet D være slik at $ABCD$ er et likebent trapes der AD og BC er parallelle. Anta at ω_B og ω_C skjærer hverandre i to forskjellige punkter P og Q. Vis at D ligger på linjen PQ.

Problem 4 Finn alle heltall n og m, $n > m > 2$, for hvilke en regulær n-kant kan skrives inn i en regulær m-kant slik at hvert hjørne i n-kanten havner på en side av m-kanten.