Den 30. nordiske matematikkonkurransen

Tirsdag 5. april 2016

Norsk versjon (bokmål)

Oppgavene skal løses på 4 timer. Du får opptil 7 poeng på hver oppgave.
Skrive- og tegneredskaper er eneste tillatte hjelpemidler.

Oppgave 1
Bestem alle følger av ikke-negative heltall $a_1, \ldots, a_{2016}$, alle mindre enn eller lik 2016, som tilfredsstiller $i + j \mid ia_i + ja_j$ for alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$.

Oppgave 2
La $ABCD$ være en syklisk firkant med $AB = AD$ og $AB + BC = CD$.
Bestem vinkelen $\angle CDA$.

Oppgave 3
Finn alle $a \in \mathbb{R}$ slik at det finnes en funksjon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med følgende to egenskaper:

(i) $f(f(x)) = f(x) + x$, for alle $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(f(x) - x) = f(x) + ax$, for alle $x \in \mathbb{R}$.

Oppgave 4
Kong Georg har bestemt seg for å forbinde de 1680 øyene i sitt kongedømme med broer. Dessverre kommer en gruppe opprørere til å ødelegge to av broene etter at de er ferdig bygd, men ikke to broer fra samme øy.

Hva er det minste antall broer kongen må få bygd for å kunne være sikker på at det etter opprørernes ødeleggelser fortsatt vil være mulig å komme seg fra enhver øy til enhver annen ved bruk av broer?