Den 29. nordiske matematikkonkurransen

Tirsdag 24. mars 2015

Norsk versjon (bokmål)

Oppgavene skal løses på 4 timer. Du får opptil 7 poeng på hver oppgave.
Skrive- og tegneredskaper er eneste tillatte hjelpemidler.

Oppgave 1

La ABC være en trekant, og Γ sirkelen med diameter AB. Vinkelhalveringslinjene til $\angle BAC$ og $\angle ABC$ skjærer Γ igjen i henholdsvis D og E. Innsirkelen til ABC tangerer BC i F, og AC i G. Vis at D, E, F og G ligger på en rett linje.

Oppgave 2

Finn alle tripler (p, q, r) av primtall som er slik at det ene av tallene pqr og $p+q+r$ er lik 101 ganger det andre.

Oppgave 3

La $n > 1$, og $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ være et polynom med n reelle røtter (telt med multiplisitet). La polynomet q være definert ved

$$q(x) = \prod_{j=1}^{2015} p(x + j).$$

Vi vet at $p(2015) = 2015$. Vis at q har minst 1970 forskjellige røtter $r_1, r_2 \dots, r_{1970}$ med $|r_j| < 2015$ for alle $j = 1, 2, \dots, 1970$.

Oppgave 4

En encyklopedi består av 2000 nummererte bind. Bindene er stablet i nummerrekkefølge med nummer 1 på toppen, og nummer 2000 i bunnen av stabelen. To typer trekk er tillatt for å stable om bindene:

(1) For hvert partall n, får man ta n bind fra toppen av stabelen og flytte dem til bunnen av stabelen uten å endre på rekkefølgen.
(2) For hvert oddetall n, får man ta n bind fra toppen av stabelen og stable dem tilbake på toppen igjen i motsatt rekkefølge.

Hvor mange forskjellige permutasjoner av bindene kan nås ved bruk av disse to typer trekk?