Den 28:e Nordiska matematiktävlingen

Måndag, 31 mars 2014

Skrivtid: 4 timmar. Varje problem är värt 5 poäng. Enda tillåtna hjälpmedel är skriv- och ritdon.

Problem 1

Bestäm alla funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (där $\mathbb{N}$ betecknar mängden av alla naturliga tal och antas innehålla 0), sådana att

$$f(x^2) - f(y^2) = f(x+y)f(x-y),$$

för alla $x, y \in \mathbb{N}$ som uppfyller $x \geq y$.

Problem 2

Givet en liksidig triangel, bestäm alla punkter i triangelns inre sådana att avståndet från punkten till en av triangelns sidor är lika med det geometriska medelvärdet av avstånden från punkten till triangelns två andra sidor.

(Två tals geometriska medelvärde ges av kvadratroten ur deras produkt.)

Problem 3

Bestäm alla icke-negativa heltal a, b, c, sådana att

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{2014}.$$

Problem 4

Ett spel spelas på ett $n \times n$ schackbräde. Vid spelets början innehåller varje ruta 99 pjäser. Två spelare A och B turas om så att spelaren på tur väljer antingen en rad eller en kolonn och tar bort en pjäs från varje ruta i den valda raden eller kolonnen. Spelarna får endast välja en rad eller en kolonn om varje ruta i denna innehåller minst en pjäs. Den förste spelaren som inte kan välja rad eller kolonn förlorar spelet. Spelare A börjar. Bestäm alla n, för vilka spelare A har en vinnande strategi.