Den 26. nordiske matematikkonkurransen

Tirsdag 27. mars 2012

Norsk versjon (bokmål)

Oppgavene skal løses på 4 timer. Du får opptil 5 poeng på hver oppgave.
Skrive- og tegnesaker er eneste tillatte hjelpemidler.

Oppgave 1. De reelle tallene a, b, c er slik at $a^2+b^2=2c^2$, og dessuten slik at $a \neq b$, $c \neq -a$, $c \neq -b$. Vis at

$$\frac{(a+b+2c)(2a^2-b^2-c^2)}{(a-b)(a+c)(b+c)}$$

er et heltall.

Oppgave 2. En trekant ABC er gitt. Punktet P ligger på trekantens omskrevne sirkel, og er midtpunkt på den av sirkelbuene BC som ikke inneholder A. Trekk en rett linje l parallelt med AB gjennom P. Sirkelen k går gjennom B, og tangerer l i punktet P. La Q være det andre skjæringspunktet mellom k og linjen AB (velg $Q = B$ om det ikke finnes et annet skjæringspunkt). Vis at $AQ = AC$.

Oppgave 3. Finn det minste positive heltallet n som er slik at det finnes n heltall $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ikke nødvendigvis forskjellige) slik at $1 \leq x_k \leq n$ for $1 \leq k \leq n$, og

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{og} \quad x_1 x_2 \cdots x_n = n!,$$

men $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \{1, 2, \ldots, n\}$.

Oppgave 4. Tallet 1 skrives opp på tavlen. Deretter dannes en tallfølge slik: ved hvert trinn erstattes hvert tall a på tavlen med $a-1$ og $a+1$; dersom tallet 0 dukker opp, viskes det ut umiddelbart; om et tall forekommer flere ganger, beholdes alle eksemplarer på tavlen. Det betyr at etter 0 trinn står det 1; etter ett trinn står det 2; etter to trinn står det 1, 3; etter tre trinn står det 2, 2, 4, og så videre. Hvor mange tall står på tavlen etter n trinn?