Den 23:e Nordiska Matematiktävlingen

Torsdagen den 2 april 2009
Svensk version

Skrivtid: 4 timmar. Varje problem är värt 5 poäng. Enda tillåtna hjälpmedel är skriv- och ritdon.

Problem 1

I en godtycklig triangel väljs en punkt, P. Genom P dras tre linjer, parallella med triangelns sidor. Linjerna delar triangeln i tre mindre trianglar och tre parallellogrammer. Låt f vara kvoten mellan den sammanlagda arean av de tre mindre trianglarna och arean av den givna triangeln. Visa att $f \geq \frac{1}{3}$ och bestäm de punkter P för vilka $f = \frac{1}{3}$.

Problem 2

På ett gulnat papper kan man med viss möda urskilja resterna av en polynommultiplikation:

$$(x^2 + x + a)(x^{15} - \ldots) \; = \; x^{17} + x^{13} + x^5 - 90x^4 + x - 90.$$

Vissa delar har gått förlorade, dels konstanttermen i den första faktorn i vänsterledet, dels större delen av den andra faktorn. Det skulle vara möjligt att restaurera polynomet som utgör den andra faktorn, men vi nöjer oss här med att ställa frågan: Vilket värde har konstanttermen a? Vi förutsätter att alla förekommande polynom har enbart heltalskoefficienter.

Problem 3

Heltalen 1, 2, 3, 4 och 5 står skrivna på en tavla. Det är tillåtet att sudda ut två tal a och b och ersätta dem med talen $a + b$ och ab. Är det möjligt, genom att upprepa denna procedur, att komma fram till en situation där tre av de fem heltalen på tavlan är lika med 2009?

Problem 4

En turnering har 32 deltagare. Det går inte att hitta två tävlande med samma spelstyrka och vid inbördes möten är det alltid den starkare som vinner. Visa att 39 matcher räcker för att fastställa guld-, silver- och bronsmedaljvinnarna.