23. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 2. 4. 2009

1. Kolmion sisältä valitaan piste P. P:n kautta piirretään kolme kolmion sivujen suuntaista suoraa. Ne jakavat kolmion kolmeksi pienemmäksi kolmioksi ja kolmeksi suunnikkaaksi. Olkoon f kolmen pienen kolmion yhteenlasketun alan ja koko kolmion alan suhde. Osoita, että $f \geq \frac{1}{3}$, ja määritä ne pisteet P, joille $f = \frac{1}{3}$.

2. Haalistuneelta paperinpalalta voidaan vaivoin lukea seuraavat merkinnät:

$$(x^2 + x + a)(x^{15} - \ldots) = x^{17} + x^{13} + x^5 - 90x^4 + x - 90.$$

Jotkin osat ovat häipyneet näkyvistä, erityisesti vasemman puolen ensimmäisen tekijän vakiotermi ja toisen tekijän loppuosa. Olisi mahdollista selvittää kokonaan toinen tekijä, mutta kysytään vain, mikä on vakiotermi a. Oletetaan, että kaikki tehtävässä esiintyvät polynomit ovat kokonaislukukertoimisia.

3. Taululle on kirjoitettu kokonaisluvut 1, 2, 3, 4 ja 5. Lukuja voidaan muuttaa niin, että pyyhitään pois luvut a ja b ja kirjoitetaan niiden sijaan luvut $a + b$ ja ab. Onko mahdollista toistamalla tätä operaatiota päästä tilanteeseen, jossa kolme viidestä taululla olevasta luvusta on 2009?

4. Turnaukseen osallistuu 32 kilpailijaa. Kaikki ovat pelikyvyiltään erilaisia ja kaksinkamppailussa parempi aina voittaa. Osoita, että kulta-, hopea- ja pronssimitalien voittajat voidaan ratkaista 39 ottelun perusteella.