23. Nordiske Matematikkonkurrence

Torsdag den 2. april 2009

Dansk version

Tid: 4 timer. Hver opgave kan give 5 point. Tilladte hjælpemidler: Skrive- og tegneredskaber.

Opgave 1

Et punkt P er valgt i en vilkårlig trekant. Tre linjer tegnes så de går gennem P og er parallelle med trekantens sider. Linjerne deler trekanten i tre mindre trekanter og tre parallelogrammer. Lad f være forholdet mellem det totale areal af de tre små trekanter og arealet af den givne trekant. Vis at $f \geq \frac{1}{3}$, og bestem de punkter P for hvilke $f = \frac{1}{3}$.

Opgave 2

På et falmet stykke papir er det muligt, med nogen anstrengelse, at se følgende:

$$(x^2 + x + a)(x^{15} - \ldots) \ = \ x^{17} + x^{13} + x^5 - 90x^4 + x - 90.$$

Nogle dele er gået tabt, dels det konstante led i den første faktor på venstresiden, dels hovedparten af den anden faktor. Det vil være muligt at genindsætte polynomiet som danner anden faktor, men vi begrænser os til spørgsmålet: Hvad er værdien af det konstante led a? Vi antager at alle polynomier i udtrykket har heltallige koefficienter.

Opgave 3

Tallene 1, 2, 3, 4 og 5 er skrevet på en tavle. Det er tilladt at viske to tal a og b ud og erstatte dem med $a + b$ og ab. Er det muligt, ved gentagelser af denne procedure, at nå en situation hvor tre af de fem tal på tavlen er 2009?

Opgave 4

Der er 32 deltagere i en turnering. Ikke to af dem har ens spillestyrke, og i enhver én mod én kamp vinder den bedste af de to spillere altid. Vis at guld-, sølv- og bronzemedaljevinderne kan findes i 39 kampe.