Den 22. nordiske matematikkonkurransen

31. mars 2008
Norsk versjon

Oppgavene skal løses på 4 timer. Du får opptil 5 poeng på hver oppgave. Skrive- og tegnesaker er eneste tillatte hjelpemidler.

Oppgave 1

Bestem alle reelle tall A, B and C som er slik at det fins en reell funksjon f som tilfredsstiller

$$f(x + f(y)) = Ax + By + C$$

for alle reelle tall x og y.

Oppgave 2

Anta at $n \geq 3$ personer med forskjellige navn sitter rundt et rundt bord. Vi kaller ethvert uordnet par av dem, for eksempel M og N, *dominerende* hvis

(i) M og N ikke sitter ved siden av hverandre, og

(ii) alle personene langs en av (eller langs begge) buene som forbinder M og N rundt bordkanten, har navn som kommer etter navnene til M og N i alfabetet.

Bestem det minste mulige antallet dominerende par.

Oppgave 3

La ABC være en trekant, og la D og E være punkter på henholdsvis BC og CA som er slik at AD og BE halverer vinkler i ABC. La F og G være punkter på den omskrevne sirkelen til ABC som er slik at AF er parallell med DE, og FG er parallell med BC. Vis at

$$\frac{AG}{BG} = \frac{AC + BC}{AB + CB}.$$

Oppgave 4

Differansen mellom tredjepotensene av to etterfølgende positive heltall er et kvadrattall n^2, der n er et positivt heltall. Vis at n er summen av to kvadrattall.