22. Nordiske Matematikkonkurrence

31. marts 2008
Dansk version

Tid: 4 timer.
Hver opgave kan give 5 point.
Tilladte hjælpemidler: Skrive- og tegneredskaber

Opgave 1

Bestem alle reelle tal A, B og C så der eksisterer en reel funktion f som opfylder

$$f(x + f(y)) = Ax + By + C$$

for alle reelle tal x og y.

Opgave 2

Antag at $n \geq 3$ mennesker med forskellige navne sidder omkring et rundt bord. Vi kalder ethvert uordnet par af disse, lad os sige M og N, *dominerende*, hvis

(i) M og N ikke sidder ved siden af hinanden, og

(ii) på den ene (eller begge) af de buer som forbinder M og N langs bordkanten, sidder udelukkende mennesker med navne som alfabetisk kommer efter navnene på M og N.

Bestem det minimale antal dominerende par.

Opgave 3

Lad ABC være en trekant, og lad D og E være punkter på henholdsvis BC og CA, så AD og BE er vinkelhalveringslinjer i ABC. Lad F og G være punkter på ABC's omskrevne cirkel så AF og DE er parallelle, og FG og BC er parallelle. Vis at

$$\frac{AG}{BG} = \frac{AB + AC}{AB + BC}.$$

Opgave 4

Differensen mellem tredjepotenserne af to på hinanden følgende positive hele tal er et kvadrattal n^2, hvor n er et positivt helt tal. Vis at n er en sum af to kvadrattal.