

16. Nordiske Matematikkonkurrence

Torsdag den 4. april 2002

Dansk version

Tid: 4 timer. Der gives 5 points for hver opgave.

Opgave 1. En trapez $ABCD$ med AB og CD parallelle og med $AD < CD$ er indskrevet i en cirkel c . Lad yderligere DP være en korde i c parallel med AC . Lad tangenten til c i D skære linien AB i E og lad PB skære DC i Q . Vis, at $EQ = AC$.

Opgave 2. Lad N kugler, nummeret fra 1 til N , være fordelt i to krukker. En kugle flyttes fra den ene krukke til den anden. Derved øges i hver krukke gennemsnittet af kuglernes numre med samme værdi x . Hvad er den største mulige værdi af x ?

Opgave 3. Lad $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ være reelle tal, så a_1, a_2, \dots, a_n alle er forskellige. Hvis produktet

$$(a_i + b_1)(a_i + b_2) \cdots (a_i + b_n)$$

antager samme værdi for alle $i, i = 1, 2, \dots, n$, vis så, at produktet

$$(a_1 + b_j)(a_2 + b_j) \cdots (a_n + b_j)$$

også antager samme værdi for alle $j, j = 1, 2, \dots, n$.

Opgave 4. Eva, Per og Anna leger med deres lommeregner. De vælger forskellige hele tal og tjekker om 11 går op i tallet eller ej. Kun 9-cifrede tal, hvor alle cifre $1, 2, \dots, 9$ er repræsenteret, studeres. Anna påstår at, hvis tallet vælges tilfældigt, så er sandsynligheden for, at det er et produkt af 11 eksakt $1/11$. Eva er uenig; hun mener, at sandsynligheden er mindre end $1/11$. Per tror imidlertid, at sandsynligheden er større end $1/11$. Hvem har ret?

Kun skrive- og tegneredskaber er tilladte.