10. Nordiske Matematikkonkurranse

Torsdag den 11. april 1996

Version: Norsk

1. Vis at det finnes et naturlig tall som er delelig med 1996 og har tverrsummen (summen av sifre i titallsystemet) 1996.

2. Bestem alle reelle tall x, slik at
$$x^n + x^{-n}$$
er et heltall for alle hele tall n.

3. En sirkel har høyden fra A i en trekant ABC som diameter og skjærer AB og AC i punktene D og E henholdsvis, som er forskellige fra A. Vis at sentrum i trekant ABC's omskrevne sirkel ligger på høyden fra A i trekanten ADE eller på dens forlengelse.

4. En funksjon f er definert for de naturlige tall, og funksjonsverdiene er reelle tall. Et naturlig tall a oppfyller
$$f(a) = f(1995), \quad f(a+1) = f(1996), \quad f(a+2) = f(1997),$$
$$f(n+a) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1} \text{ for alle naturlige tall } n.$$
   (a) Vis at $f(n+4a) = f(n)$ for alle naturlige tall n.
   (b) Bestem den minste verdi som a kan ha.

Det gis 4 timer til besvarelsen.

Hver oppgave bedømmes med høyst 5 poeng.