

25. Nordiske Matematikkonkurrence

Mandag den 4. april 2011

Dansk version

Tid: 4 timer. Hver opgave kan give 5 point. Tilladte hjælpemidler: Skrive- og tegneredskaber.

Opgave 1

Lad $a_0, a_1, \dots, a_{1000}$ betegne cifre. Kan summen af de 1001-cifrede tal $a_0a_1 \dots a_{1000}$ og $a_{1000}a_{999} \dots a_0$ have udelukkende ulige cifre?

Opgave 2

I en trekant ABC antages $|AB| = |AC|$. Lad D og E være sådanne punkter henholdsvis på forlængelsen af linjestykket BA ud over A og på linjestykket BC at linjerne CD og AE er parallelle. Vis at $|CD| \geq \frac{4h}{|BC|} |CE|$, hvor h er højden fra A i trekant ABC . Hvornår gælder lighedstegn?

Opgave 3

Find de funktioner f som opfylder

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

for alle reelle tal x og y .

Opgave 4

Vis at for hvert helt tal $n \geq 2$ er summen af brøkerne $\frac{1}{ab}$, hvor a og b er indbyrdes primiske positive hele tal som opfylder $a < b \leq n$ og $a + b > n$, lig med $\frac{1}{2}$.

(Hele tal a og b siges at være *indbyrdes primiske* hvis største fælles divisor for a og b er 1).