24. Nordiske Matematikkonkurrence

Tirsdag den 13. april 2010

1. En funktion $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, hvor $\mathbb{Z}_+$ er mængden af positive hele tal, er svagt voksende og opfylder $f(mn) = f(m)f(n)$ for alle positive hele tal m og n som er indbyrdes primiske. Vis at $f(8)f(13) \geq (f(10))^2$.

2. Tre cirkler Γ_A, Γ_B og Γ_C har et fælles skæringspunkt O. Det andet skæringspunkt mellem Γ_A og Γ_B er C, det andet skæringspunkt mellem Γ_A og Γ_C er B, og det andet skæringspunkt mellem Γ_C og Γ_B er A. Linjen AO skærer cirklen Γ_A i punktet $X \neq O$. Ligeledes skærer linjen BO cirklen Γ_B i punktet $Y \neq O$, og linjen CO skærer cirklen Γ_C i punktet $Z \neq O$. Vis at

$$\frac{|AY|\,|BZ|\,|CX|}{|AZ|\,|BX|\,|CY|} = 1.$$

3. Laura har foran sig 2010 lamper som hver er forbundet med netop én af 2010 knapper. For hver knap ønsker hun at kende den tilhørende lampe. For at gøre det observerer hun hvilke lamper der er tændte, når Richard trykker et udvalg af knapper (ikke at trykke på nogen knapper er også et muligt udvalg af knapper). Richard trykker altid knapperne ned samtidigt så lamperne også tændes samtidigt.

a) Hvis Richard vælger knapperne som der skal trykkes på, hvad er så det det største antal af forskellige kombinationer af knapper som han kan trykke på, før end Laura kan tilknytte knapperne og lamperne korrrekt?

b) Hvis Laura vælger knapperne som der skal trykkes på, hvad er det mindste antal forskellige kombinationer af knapper som der skal trykkes på, før end hun kan tilknytte knapperne og lamperne korrekt?

4. Et positivt helt tal kaldes *simpelt* hvis det opskrevet i 10-talssystemet udelukkende består af nuller og ét-taller. Bestem det mindste positive hele tal k sådan at hvert positivt heltal n kan skrives som $n = a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_k$, hvor $a_1, \ldots, a_k$ er simple.

Tid: 4 timer.
Hver opgave kan give 5 point.
Kun skrive- og tegneredskaber er tilladte.