

20. Nordiske Matematikkonkurrence

Torsdag den 30. marts 2006

Dansk version

Tid: 4 timer. Der gives 5 point for hver opgave.

Opgave 1. Lad B og C være punkter på to givne halvlinjer som udgår fra et punkt A , sådan at $|AB| + |AC|$ er konstant.

Vis at der eksisterer et punkt $D \neq A$, sådan at de omskrevne cirkler til trekanterne ABC går gennem D for ethvert valg af B og C .

Opgave 2. De reelle tal x , y og z er ikke alle ens og opfylder

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = k$$

Bestem alle mulige værdier af k .

Opgave 3. En følge af positive hele tal $\{a_n\}$ er givet ved

$$a_0 = m \quad \text{og} \quad a_{n+1} = a_n^5 + 487 \quad \text{for alle } n \geq 0$$

Bestem de værdier af m , for hvilke følgen indeholder så mange kvadrattal som muligt.

Opgave 4. Felterne på et skakbræt med størrelsen 100×100 er malet med 100 forskellige farver. Hvert felt har kun én farve, og hver farve bruges præcis 100 gange.

Vis at der eksisterer en vandret eller en lodret række på skakbrættet med mindst 10 farver.

Kun skrive- og tegneredskaber er tilladte