15. Nordiske Matematikkonkurrence

Torsdag den 29. marts 2001

Dansk version

Tid: 4 timer. Der gives 5 points for hver opgave.

Opgave 1. Lad A være en endelig mængde af kvadrater i et koordinatsystem, sådan at hvert kvadrat har sine hjørner i punkter med koordinater på formen (m, n), $(m+1, n)$, $(m, n+1)$ og $(m+1, n+1)$ for heltallige værdier af m og n.

Vis, at der eksisterer en delmængde B af A bestående af mindst 25% af alle kvadraterne i A, sådan at ikke to forskellige kvadrater i B har et fælles hjørnepunkt.

Opgave 2. Lad f være en begrænset reel funktion defineret for alle reelle tal, sådan at følgende betingelse gælder for alle reelle tal x:

$$f(x+\tfrac{1}{3}) + f(x+\tfrac{1}{2}) = f(x) + f(x+\tfrac{5}{6})$$

Vis, at f er periodisk. (En funktion f kaldes begrænset, hvis der findes et tal L, sådan at $|f(x)| < L$ for ethvert reelt tal x. En funktion f kaldes periodisk, hvis der eksisterer et positivt tal k, sådan at $f(x+k) = f(x)$ for ethvert reelt tal x).

Opgave 3. Bestem antallet af reelle rødder i ligningen

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \tfrac{5}{2} = 0$$

Opgave 4. Lad $ABCDEF$ være en konveks sekskant, i hvilken hver af diagonalerne AD, BE og CF deler sekskanten i to firkanter med lige store arealer.

Vis at AD, BE og CF går igennem samme punkt.

Kun skrive- og tegneredskaber er tilladte.