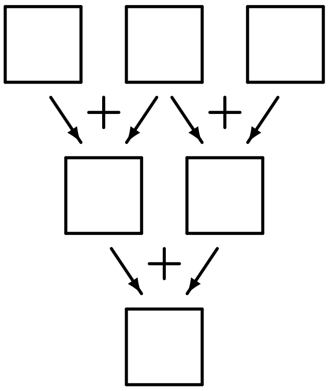
Lille Georgs julekalender 2010

1. december

I hver af de øverste bokse skal der skrives et af tallene 1, 2, 3, ..., 9. Alle tre tal skal være forskellige. I de næste bokse skrives de tal der fremkommer ved at man lægger sammen som vist.

Hvad er det største tal der kan fremkomme i den nederste boks? Og det mindste?



Svar: Største tal: 33. Mindste tal: 7.

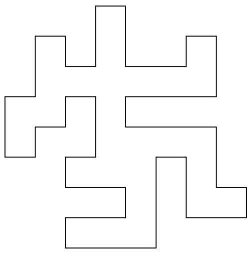
Begrundelse: Når tallet skal være så stort som muligt, skal der bruges de størst mulige tal i de øverste bokse, altså tallene 7, 8 og 9. Det midterste tal bliver medregnet i den endelige sum to gange, derfor kan det bedst betale sig at bruge det største tal i midten: altså 7, 9 og 8 foroven. I anden række fås så 16 og 17, og i nederste række 16+17=33.

På tilsvarende måde fås den mindst mulige sum ved at vælge tallene 2, 1 og 3 i boksene foroven, hvilket giver 3 og 4 i anden række og 3+4=7 i den nederste boks.

Lille Georgs julekalender 2010

2. december

Kan denne figur dækkes af en cirkel med radius $4\frac{1}{2}$?
Alle figurens grene har en bredde på 1.

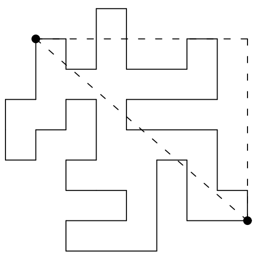


Svar: Nej

Begrundelse: En cirkel med radius $4\frac{1}{2}$ har diameter 9. Hvis figuren kunne dækkes af en sådan cirkel, ville afstanden mellem to punkter i figuren aldrig overstige 9. Men afstanden mellem de to markerede punkter er if. Pythagoras

$$\sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{49 + 36} = \sqrt{85} \quad ,$$

altså større end 9 (fordi $9 = \sqrt{81}$). Derfor er svaret nej.



Lille Georgs julekalender 2010

3. december

Hvilke bogstaver skal der stå på de tomme pladser?

$$\cdots\ \boxed{\mathrm{O}}\ \boxed{\mathrm{E}}\ \boxed{\phantom{\mathrm{M}}}\ \boxed{\mathrm{M}}\ \boxed{\mathrm{S}}\ \boxed{\mathrm{V}}\ \boxed{\mathrm{E}}\ \boxed{\mathrm{I}}\ \boxed{\phantom{\mathrm{M}}}\ \boxed{\mathrm{E}}\ \boxed{\mathrm{V}}\ \boxed{\mathrm{N}}\ \cdots$$

Svar: E og I

Begrundelse: Boksene indeholder sidste bogstav i tallene i talrækken:

..., tO, trE, ?, feM, sekS, syV, ottE, nI, ?, ellevE, tolV, tretteN, ...

hvor tallene firE og tI mangler.

Lille Georgs julekalender 2010

4. december

Henne hos den lokale grønthandler er frugt og grønt sorteret i to grupper:

GRUPPE 1:

bl.a. jordbær, banan, vindrue, nød, hvidkål, gulerod, tomat

GRUPPE 2:

bl.a. citron, kartoffel, appelsin, rødkål, æble, kirsebær, ananas

Hvor hører grapefrugt til?

Svar: I gruppe 2.

Begrundelse: Ordene sorteres efter om antallet af bogstaver er et primtal (gruppe 1, ordlængder 3, 5, 7) eller et sammensat tal (gruppe 2, ordlængder 4, 6, 9 og altså også 10).

Kommentar: Bemærk at dette ikke er en matematikopgave. At et system ser ud til at holde i et endeligt antal tilfælde, giver ingen garanti for at det holder i alle andre tilfælde.

Lille Georgs julekalender 2010

5. december

I felterne i kvadratet nedenfor skal Peter skrive tal således at alle summer både vandret, lodret og diagonalt er ens. Tre af felterne er allerede fyldt ud. Hvad skal der stå i feltet markeret med spørgsmålstegn?

		7
?		
	10	3

Svar: Der skal stå 4.

Begrundelse:

		7
?		y
x	10	3

Da nederste række og søjlen yderst til højre har samme sum, må y være lig med $x + 3$. Da midterste række og diagonalen fra nederste venstre hjørne til øverste højre hjørne har samme sum, må $? + y$ være lig med $x + 7$. Så er $? + x + 3 = x + 7$, altså $? = 4$.

Kommentar: Ved at fortsætte analysen når man frem til at det udfyldte kvadrat må se således ud:

9	2	7
4	6	8
5	10	3

Og dette kvadrat opfylder faktisk det givne med en fælles sum på 18 for alle rækker, søjler og diagonaler.

Lille Georgs julekalender 2010

6. december

Hvilke tal t opfylder begge følgende ligninger?

$$(t-1)(t+2)(t-4)(t+8)(t-16)(t+32)(t-64)(t+128)(t-256)(t+512)(t-1024) = 0$$

$$(t^2-1)(t^2+2)(t^2-4)(t^2+8)(t^2-16)(t^2+32)(t^2-64)(t^2+128)(t^2-256)(t^2+512)(t^2-1024) = 0$$

Svar: Tallene 1, -2, 4, -8, 16, -32.

Begrundelse: Ifølge nulreglen har den første ligning løsningerne 1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256 og -1024, mens den anden ligning har løsningerne ±1, ±2, ±4, ±8, ±16 og ±32, idet hver anden parentes giver anledning til to løsninger. De fælles løsninger for de to ligninger er således 1, -2, 4, -8, 16 og -32.

Lille Georgs julekalender 2010

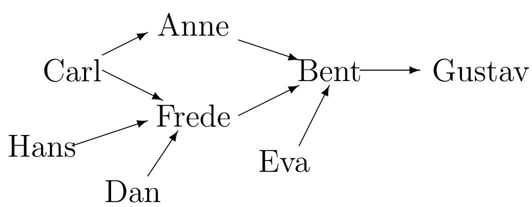
7. december

Anne, Bent, Carl, Dan, Eva, Frede, Gustav og Hans har deltaget i en konkurrence hvor man kunne få fra 0 til 10 point. Alle deltagerne fik forskelligt pointtal. Alle fik mindst 2 point. Ingen fik 9 point. Bent fik mere end Eva og mindre end Gustav. Anne og Frede fik mere end Carl og mindre end Bent. Hans og Dan fik mindre end Frede.

Hvor mange point fik Bent?

Svar: 8 point

Begrundelse: De givne oplysninger kan repræsenteres med pile i et diagram:



Alle undtagen Gustav fik lavere pointtal end Bent. Alle pointtallene 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 blev benyttet. Derfor må Gustav have fået 10 point og Bent 8.

Kommentar: Bemærk at man ikke ud fra opgavens oplysninger kan finde ud af fordelingen af de øvrige pointtal.

Lille Georgs julekalender 2010

8. december

Firmaet QuickToast lancerer en ny serie af brødristere med individuelle navne: Jetjageren (stor, Deluxe, sølv), Sporvognen (stor, Standard, gul), Postkassen (lille, Standard, rød) m. fl. Den nye brødrister fremstilles i farverne sort, oliven, sølv, rød og gul, i to størrelser og i kvalitet Standard eller Deluxe. Hvor mange forskellige navne er der højst brug for?

Svar: 20

Begrundelse: Der skal vælges størrelse (2 muligheder), kvalitet (2 muligheder) og farve (5 muligheder). I alt er der ifølge multiplikationsprincippet

$$2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

muligheder.

Lille Georgs julekalender 2010

9. december

I det interne telefonsystem hos Juhl Nissen er alle telefonnumrene 4-cifrede og består af fire forskellige cifre, hvoraf ingen er 0. Gamle Juhl har besluttet at numrene skal være opbygget så det første ciffer er mindre end det andet, og det tredje er mindre end det fjerde. Således er 58 17 et gyldigt nummer, mens 27 43 ikke er det.

Hver ansat har sit eget nummer. Hvor mange ansatte kan der højst være i firmaet?

Svar: 756

Begrundelse: Cifrene til de første to pladser kan vælges på

$$K(9,2) = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36 \quad \text{måder} \quad .$$

Cifrene til de sidste to pladser kan herefter vælges på

$$K(7,2) = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21 \quad \text{måder} \quad .$$

Det samlede valg kan derfor foretages på

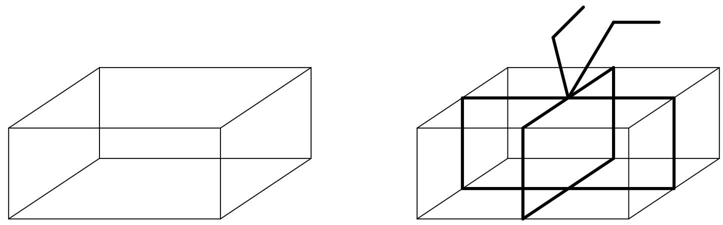
$$36 \cdot 21 = 756 \quad \text{måder} \quad .$$

Samme resultat kan nås med mange andre fremgangsmåder. Vælg f.eks. i første omgang cifrene til de fire pladser et efter et, hvilket kan gøres på $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ måder, og indse at resultatet bliver 4 gange for stort, så det endelige svar bliver $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4} = 756$ måder.

Lille Georgs julekalender 2010

10. december

Lille J har pakket en julegave fint ind og sat gavebånd omkring den. i alt har han brugt 150 cm gavebånd, hvoraf de 40 cm skal bruges til at binde en sløjfe.



Æsken er længere end den er bred og dobbelt så lang som den er høj. Dens højde er mindre end dens bredde. Både længde, bredde og højde er delelige med 5 cm.

Hvad er æskens rumfang?

Svar: 3000 cm^3

Begrundelse: Kald æskens længde, bredde og højde for l, b og h. Så er den samlede længde af gavebåndet

$$2l + 2b + 4h + 40 = 150 \quad ,$$

altså

$$2l + 2b + 4h = 110$$

eller

$$l + b + 2h = 55 \quad .$$

Da alle målene er delelige med 5, kan vi skrive $h = 5x$ og $b = 5y$, og da længden er det dobbelte af højden, er $l = 2h = 10x$. Ved indsættelse fås

$$10x + 5y + 10x = 55 \quad ,$$

som kan reduceres til

$$4x + y = 11 \quad .$$

Positive heltalsløsninger er til denne ligning er $(x, y) = (1, 7)$ og $(x, y) = (2, 3)$. Da æskens længde er større end dens bredde, er $10x > 5y$, altså $2x > y$, og derfor dur den førstnævnte løsning ikke. Altså må vi have $(x, y) = (2, 3)$.

Æskens sider er da $h = 5x = 10$, $b = 5y = 15$ og $l = 10x = 20$, og dens rumfang er $10 \cdot 15 \cdot 20 = 3000$ cm^3.

Lille Georgs julekalender 2010

11. december

Tallet n opfylder

$$9^n + 9^n + 9^n = 3^{4021} \quad .$$

Find n uden brug af lommeregner.

Svar: 2010

Begrundelse: Ligningen omskrives til

$$3 \cdot 9^n = 3 \cdot 3^{4020}$$

og videre med brug af potensregneregler til

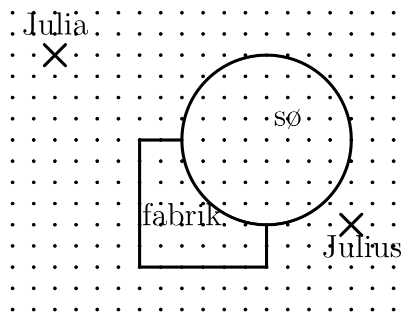
$$3 \cdot 9^n = 3 \cdot (3^2)^{2010} \quad ,$$

hvoraf det ses at $n = 2010$.

Lille Georgs julekalender 2010

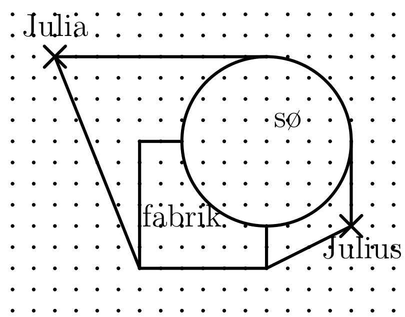
12. december

Når Julia skal på besøg hos Julius, går hun somme tider nord om søen og andre gange syd om fabrikken. Hvilken vej er egentlig den korteste?



Svar: Den nordlige rute

Begrundelse:



Den nordlige rute har længden

$$10 + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4 + 4 \;\approx\; 20,3$$

(nemlig et stykke i retningen stik vest, en kvartcirkel med radius 4 og til sidst et stykke i retningen stik syd).
Den sydlige rute har længden

$$\sqrt{4^2 + 10^2} + 6 + \sqrt{4^2 + 2^2} \;\approx\; 21,2$$

(nemlig et stykke i en skrå retning (længden udregnes med Pythagoras), et stykke i stik østlig retning og til sidst et stykke i en skrå retning (længden udregnes med Pythagoras)).

Lille Georgs julekalender 2010

13. december

125 ens små terninger limes sammen til en $5 \times 5 \times 5$-terning, som hænges op i loftet i en lang, tynd snor.

Nu får du lov til at kikke på terningen med det ene øje lukket. Hvor mange af de små terninger kan du højst se på én gang? Du vælger selv fra hvilket punkt i rummet du vil kikke på terningen.

Svar: 61

Begrundelse: Man kan højst se tre sideflader på en gang, dvs. umiddelbart 25 terninger pr. sideflade. Men terningerne på kanterne skal jo ikke tælles med mere end én gang.

Man kan tælle på flere måder. Mest direkte er det at tælle først sider uden kanter, så kanter uden det fælles hjørne og til sidst det fælles hjørne: $3 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 1 = 61$.

Kommentar: Man kunne også bruge det såkaldte "inklusion-eksklusion"-tælleprincip: vi får da $25 + 25 + 25 - 5 - 5 - 5 + 1 = 61$, svarende til først at medtælle de tre sideflader, derefter fratrække de tre kanter der er talt to gange, og til sidst addere hjørneterningen, der oprindelig var medtalt tre gange og herefter fratrukket tre gange igen.

Lille Georgs julekalender 2010

14. december

Malte samler på funktioner der opfylder

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

for alle værdier af x og y. Han har foreløbig fundet funktionen med forskriften $f(x) = x^2$. Er der flere?
Maltes søster samler på funktioner der opfylder

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

for alle værdier af x og y. Hun har foreløbig kun fundet funktionen med forskriften $f(x) = 0$, altså konstanten 0. Findes der nogen der er mere spændende?

Svar: Alle funktioner med en forskrift af formen $f(x) = x^a$ (dvs. alle potensfunktioner) opfylder $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

Alle funktioner med en forskrift af formen $f(x) = ax$ (dvs. alle proportionaliteter) opfylder $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

Begrundelse: Med brug af en potensregneregel ses at alle funktioner med en forskrift af formen $f(x) = x^a$ opfylder

$$f(x \cdot y) = (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a = f(x) \cdot f(y) \quad .$$

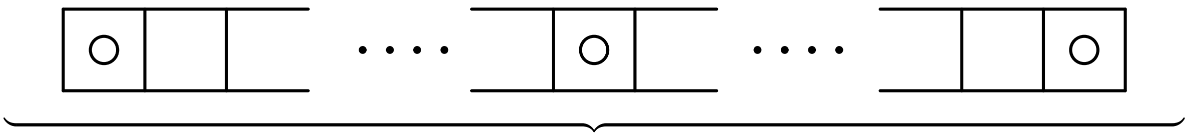
Det ses at alle funktioner med en forskrift af formen $f(x) = ax$ opfylder

$$f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y) \quad .$$

Lille Georgs julekalender 2010

15. december

Et spil for tre spillere spilles på et bræt bestående af 99 felter i en lang række. Hver spiller har en spillebrik. Ved spillets start står de tre brikker på det første, det midterste og det sidste felt. En tur består i at man flytter sin brik enten en eller tre pladser frem eller tilbage (inden for brættets rammer). Man vinder spillet ved at rykke sin brik hen på et felt hvor en modstanders brik står.



99 felter

Hans påstår at hvis den spiller der starter på midterste felt, er første spiller, så kan spiller nr. to ikke vinde spillet.

Har han ret?

Svar: Ja

Begrundelse: Tænk på paritet (dvs. tænk på lige/ulige). Ved start står spiller nr. 1 på et lige felt (nemlig felt nr. 50), spiller nr. 2 og 3 på ulige felter (nemlig henholdsvis felt nr. 1 og felt nr. 99).

I hvert træk ændrer hver spiller sin paritet. Hver gang nr. 1 har trukket, har alle tre spillere samme paritet. Derfor kan nr. 2 ikke vinde.

Lille Georgs julekalender 2010

16. december

I en bolsjekrukke er der mellem 100 og 200 bolsjer. Hvis bolsjerne deles lige mellem syv børn, bliver der to bolsjer tilovers. Hvis krukkens indhold deles lige mellerm seks børn, bliver der tre bolsjer tilovers.

Kan man ud fra disse oplysninger afgøre hvor mange bolsjer der bliver til rest hvis bolsjerne deles lige mellem fem børn?

Svar: Nej

Begrundelse: Hvis n er et brugbart antal, gælder det samme om $n + 42$ og $n - 42$. Hvis nemlig n giver resten 2 ved division med 7, gælder det samme om tallene $n \pm 42$ fordi 7 går op i 42, og hvis n giver resten 3 ved division med 6, gælder det samme om tallene $n \pm 42$ fordi 6 går op i 42.

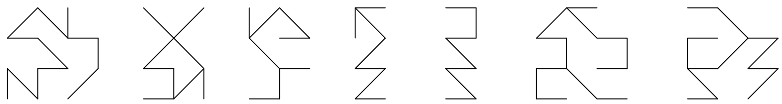
Da afstanden mellem 100 og 200 er over 42, vil enten $n + 42$ eller $n - 42$ også ligge mellem 100 og 200. Derfor kan man ikke afgøre det præcise antal.

Konkret kan tallene 135 og 177 bruges, og de giver henholdsvis 0 og 2 til rest ved division med 5.

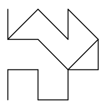
Lille Georgs julekalender 2010

17. december

I et temmelig upraktisk talsystem bruges taltegnene vist nedenfor. Hvilket tal betegner figuren med spørgsmålstegn?



-1 0 1 2 3 4 5



?

Svar: -2

Begrundelse: Talværdien er lig med antallet af vandrette streger minus antallet af lodrette streger, altså $6-4=-2$. De skrå streger er uden betydning.

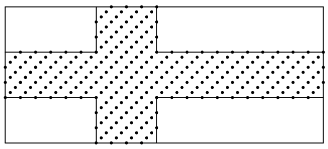
Kommentar: Bemærk at denne opgave *ikke* er en matematikopgave. Matematisk set kan man jo beslutte hvad som helst angående tilknytningen mellem symboler og tal, og bare fordi et system passer i et endeligt antal eksempler, er der ingen garanti for at det passer i andre tilfælde.

Lille Georgs julekalender 2010

18. december

Med en bred pensel males en stribe på hver led i et rektangel som vist. Arealet af det malede område udgør halvdelen af rektanglets areal. Bredden af penslen er en tredjedel af den ene side af rektanglet.

Hvad er forholdet mellem rektanglets sidelængder?



Svar: Forholdet er 4 : 3

Begrundelse: Kald penslens bredde b. Så er rektanglets højde $3b$. Kald forholdet mellem længde og højde for k. Så er rektanglets længde $k \cdot 3b = 3kb$. Stribens samlede areal er

$$3b \cdot b + 3kb \cdot b - b^2 = 2b^2 + 3kb^2 = (2 + 3k)b^2 \quad .$$

Arealet $3b \cdot 3kb = 9kb^2$ af hele rektanglet er det dobbelt så stort som arealet af striben, altså

$$9kb^2 = 2(2 + 3k)b^2 \quad ,$$

hvoraf

$$9k = 2(2 + 3k) \quad .$$

Denne ligning omskrives til $3k = 4$. Det søgte forhold mellem siderne er da

$$k = \frac{4}{3} \quad .$$

Lille Georgs julekalender 2010

19. december

Anders, Frederik og Rasmus er på besøg hos tante Karen.
"Kan du gætte hvad det er for nogle tal vi har skrevet på det her stykke papir?" spørger Anders.
"Måske," siger tante Karen, "men I bliver nødt til at fortælle mig lidt om tallene."
"Vi har skrevet ét tal hver," oplyser Frederik.
"Og det er altså nogle meget store tal!" siger Rasmus.
"Mit tal er over 1000," fortæller Anders.
"Mit tal starter med 2," siger Frederik.
"Mit tal er lige præcis tre gange så stort som Frederiks tal," fortæller Rasmus.
"Kan du nu gætte tallene?" spørger Anders.
"Nej," siger tante Karen, "jeg er nødt til at få lidt mere at vide."
"Ok," siger Frederik. "Hvis vi ganger vores tal med hinanden, får vi 25722582974."
"Nej, det kan ikke passe," siger tante Karen. "I må desværre have lavet en regnefejl."

Hvordan kan tante Karen vide det?

Svar: Ifølge oplysningerne er et af tallene lig med tre gange et andet af tallene. Det er derfor deleligt med 3. Produktet af de tre tal vil derfor også være deleligt med 3. Men 25722582974 er ikke deleligt med 3 - som det let ses ved brug af tværsumsreglen.

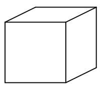
Kommentar: Husk at et tal er deleligt med 3 hvis og kun hvis 3 går i tværsummen af tallet. Og husk at når man beregner tværsummen, behøver man ikke at regne færdig: hver gang man støder på led i summen der giver 3, 6 eller 9, kan de glemmes, fordi de ikke vil ændre på om 3 går op i resultatet.

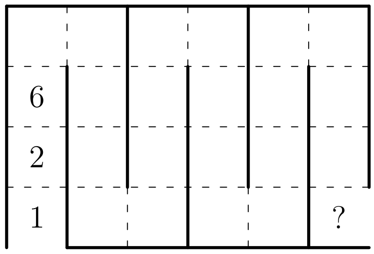
Lille Georgs julekalender 2010

20. december

En spilleterning anbringes på feltet markeret med 1 i labyrinten nedenfor med 1-siden opad fra papiret, 2-siden udad mod indgangen og 3-siden vendt ind mod skillevæggen til højre. Terningen føres nu gennem labyrinten på følgende måde: Når den skal fra et felt til det næste, vippes den ned over den kant der vender hen mod det næste felt, så den kommer til at hvile på en ny side. Således vil 2-siden pege opad efter første vip, og 6-siden efter det næste.

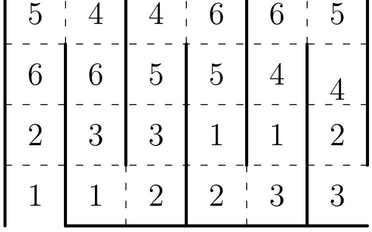
Hvilken side peger opad når terningen når til feltet med spørgsmålstegn?





Svar: 3

Begrundelse:



Lille Georgs julekalender 2010

21. december

Anna bor 40 minutters gang fra sit arbejde. Hvis hun i stedet løber hele vejen til arbejdet, vender om og løber halvvejs hjem igen, vender om igen og går resten af vejen til arbejdet, tager den samlede tur 5 minutter mindre end hvis hun gik hele vejen. Hun løber 20 kilometer i timen.

Hvor langt har Anna til arbejde?

Svar: $3\frac{1}{3}$ km

Begrundelse: Kald strækningen (målt i km) for s. Kald Annas fart ved gang (målt i km/min) for v og hendes fart ved løb (ligeledes målt i km/min) for u.

Den beskrevne tur tager 5 minutter mindre end 40 minutter, dvs. 35 minutter. Vi kan derfor opstille følgende ligning for tiden:

$$\frac{s}{u} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{u} + \frac{1}{2} \cdot 40 = 35$$

hvoraf

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{s}{u} = 15$$

og videre

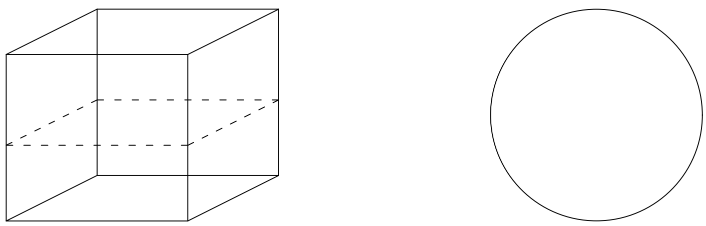
$$s = \frac{2}{3} \cdot 15 \cdot u = 10u \quad .$$

Løbefarten er 20 km i timen, dvs. $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ km i minuttet. Den søgte strækning er derfor $s = 10 \cdot \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$ km.

Lille Georgs julekalender 2010

22. december

Et akvarium af form som en terning er halvt fyldt med vand. En kugle hvis diameter er lig med terningens sidelængde, sænkes forsigtigt ned i akvariet. Løber vandet over?



Svar: Ja

Begrundelse: Kald terningens sidelængde for a. Dens rumfang er da a^3.

Rumfanget af kuglen er

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^3}{8} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^3 \quad ,$$

og

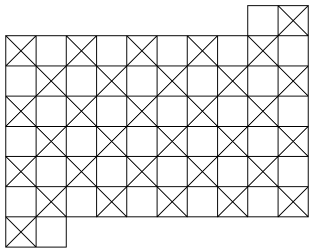
$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^3 > \frac{1}{2} \cdot a^3$$

fordi $\pi > 3$. Altså optager kuglen over halvdelen af terningens rumfang. Der er derfor ikke plads til alt vandet, som følgelig må løbe over.

Lille Georgs julekalender 2010

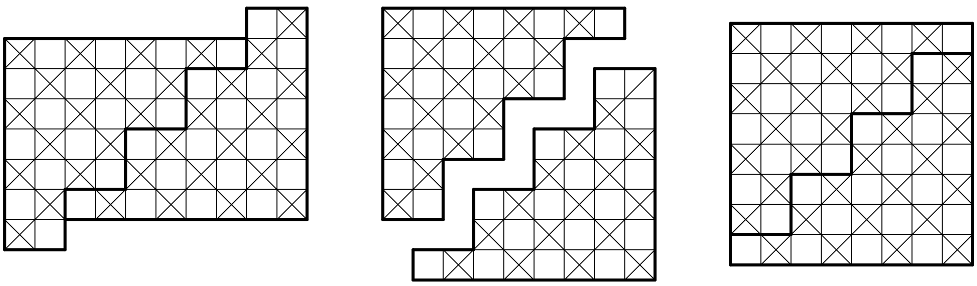
23. december

Kan dette ternede bræt saves ud i to kongruente stykker der kan sættes sammen til et skakbræt?



Svar: Ja

Begrundelse:



Lille Georgs julekalender 2010

24. december

Skriv tallet 24 ved hjælp af tallene 1, 2, 3, 4 og 5. Hvert af tallene skal bruges netop én gang.

Svar: F. eks. $24 = 4 \cdot (2 + 5) - 3 - 1$.