

*Lille Georgs julekalender 08*

***1. december***

Et digitalur viser 20:08. Hvor lang tid går der før de samme fire cifre vises igen (gerne i en anden rækkefølge) ?

*Svar:* 4 timer og 20 minutter

*Forklaring:* Næste gang cifrene vises, er klokken 00:28.

*Lille Georgs julekalender 08*

*2. december*

Hvilket matematisk tegn kan anbringes mellem 2 og 3, således at der fremkommer et tal der er større end 2, men mindre end 3?

*Svar:* Et komma

*Forklaring:* Tallet 2,3 ligger mellem 2 og 3.

*Lille Georgs julekalender 08*

**3. december**

En ældre herre tager sporvognen linje A fra sit hjem ind til Storetorv. Han kikker ud ad vinduet på hele turen og bemærker at man passerer en modkørende linje A hvert femte minut. Hvor mange gange i timen afgår linje A fra Storetorv?

*Svar:* 6 gange

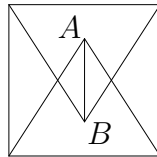
*Forklaring:* Da den ældre herre sidder i en sporvogn der kører de modkørende i møde, vil han møde en modkørende sporvogn dobbelt så ofte som hvis han stod stille. Stod han stille, ville han kun se en hvert tiende minut. Det betyder at sporvognene afgår hvert tiende minut, altså 6 gange i timen.

(I opgaveformuleringen er underforstået at alle sporvogne kører med samme konstante fart, og at de afgår regelmæssigt fra Storetorv.)

## Lille Georgs julekalender 08

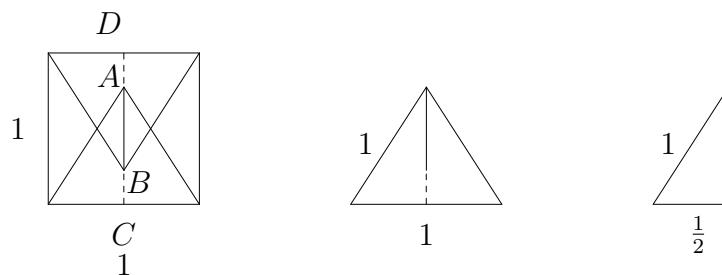
## 4. december

Figuren viser et kvadrat og to ligesidede trekanter. Kvadratets sidelængde er 1. Hvad er længden af linjestykket  $AB$ ?



Svar:  $\sqrt{3} - 1$

Forklaring:



Højden  $|AC|$  i den ligebenede trekant udregnes vha. Pythagoras på trekanten til højre:

$$|AC| = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Så er

$$|AD| = 1 - |AC| = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

På grund af symmetrien er

$$|AD| = |BC| .$$

Altså er

$$|AB| = 1 - 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - 2 + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1 .$$

*Lille Georgs julekalender 08*

**5. december**

- a) Er det muligt at lave en trekant hvori summen af ethvert par af vinkler er mindre end  $120^\circ$ ?
- b) Er det muligt at lave en femkant hvori summen af ethvert par af vinkler er mindre end  $216^\circ$ ?

*Svar:* a) Nej. b) Nej.

*Forklaring:* a) Antag at der fandtes en trekant  $ABC$  med denne egenskab. Så ville

$$A + B < 120^\circ ,$$

$$B + C < 120^\circ ,$$

$$C + A < 120^\circ .$$

Ved addition af de tre ligninger fås

$$2A + 2B + 2C < 3 \cdot 120^\circ = 360^\circ ,$$

og deraf ved division med 2:

$$A + B + C < 180^\circ .$$

Trekantens vinkelsum er altså mindre end  $180^\circ$ . Modstrid. Altså findes en sådan trekant ikke.

b) Vi bruger samme princip. Antag at der fandtes en femkant  $ABCDE$  med denne egenskab. Hvis man adderede alle ulighederne svarende til hvert af de 10 mulige par af vinkler ( $A + B < 216^\circ$ ,  $A + C < 216^\circ$  osv. ), ville man få

$$4A + 4B + 4C + 4D + 4E < 10 \cdot 216^\circ = 2160^\circ ,$$

idet hver vinkel optræder i denne sum 4 gange (nemlig en gang sammen med hver af de øvrige vinkler). Altså ville vi have

$$A + B + C + D + E < \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 216^\circ = 5 \cdot 108^\circ = 540^\circ ,$$

dvs. femkanten ville have en vinkelsum på under  $540^\circ$ . Dette er en modstrid. Dermed har vi vist at en sådan femkant ikke findes.

*Lille Georgs julekalender 08*

**6. december**

Skovens dyr afholder hvert år et væddeløb. Løbebanen er lagt rundt om skovsøen, og efter hver runde går det sidste dyr ud af løbet. Kænguruen, der er inviteret med som gæstedeltager, forventer at ende på en tiendeplads. Hvor mange runder kommer den i så fald til at løbe? Ialt 100 dyr deltager i det prestigefyldte løb.

*Svar:* 91 runder

*Forklaring:* Når kænguruen forlader løbet, er der kun 9 dyr tilbage. Altså har  $100 - 9 = 91$  dyr, inklusive kænguruen, forladt løbet. Den har dermed løbet 91 runder.

*Lille Georgs julekalender 08*

**7. december**

Anders, Bertel og Carl mødes i fitness-centeret. En af dem er læge, en er advokat og en er arkitekt. Arkitekten er enebarn og vejer mindre end de andre. Carl er gift med Anders' søster og vejer mere end advokaten. Hvad hedder arkitekten?

*Svar:* Bertel

*Forklaring:* Vi bruger udelukkelsesmetoden: Han hedder ikke Anders (for Anders er åbenbart ikke enebarn) og ikke Carl (for Carl vejer ikke mindre end de andre).

## Lille Georgs julekalender 08

## 8. december

På en idrætsdag har eleverne spillet ialt 5 kampe i forskellige sportsgrene mod hold bestående af lærere. På forhånd havde A, B og C tippet følgende resultater (E: eleverne vinder, U: uafgjort, L: lærerne vinder)

A	E	U	L
1	×		
2	×		
3		×	
4		×	
5			×

B	E	U	L
1			×
2		×	
3	×		
4		×	
5	×		

C	E	U	L
1	×		
2	×		
3			×
4	×		
5		×	

Da alle kampe var spillet, viste det sig at A og B havde hver 3 rigtige, mens C kun havde 2 rigtige.

Hvor mange af kampene vandt eleverne?

*Svar:* 4

*Forklaring:* Da A og B hver har 3 af de 5 tip rigtige, må de have mindst 1 rigtigt tip fælles. Da kamp nr. 4 er den eneste de er enige om, må de have tippet rigtigt her. Kamp nr. 4 er altså uafgjort. Da A og C hver har 2 af de resterende tip rigtige, må de være enige om mindst 2 tip. Da kamp nr. 1 og 2 er de eneste de er fælles om, må A og C have tippet rigtigt i disse. Kamp nr. 1 og 2 blev altså vundet af eleverne. Da B har tippet forkert her, men har 2 rigtige, må B have tippet rigtigt i kamp nr. 3 og 5. Disse kampe blev altså vundet af eleverne. I alt har eleverne dermed vundet 4 kampe.



*Lille Georgs julekalender 08*

**9. december**

Hvad er det mindste tal der kan fremkomme som produkt af tre hele positive tal med sum 2008?

*Svar:* 2006

*Forklaring:* Opspaltningen  $2008 = 1 + 1 + 2006$  giver det mindst mulige produkt:  $2006 = 1 \cdot 1 \cdot 2006$ .

*Lille Georgs julekalender 08*

**10. december**

Er det muligt at udfylde et  $8 \times 8$ -skema med tallene  $-1$ ,  $0$  og  $1$  sådan at alle rækkesummer, søjlesummer og diagonalsummer er forskellige?

*Svar:* Nej

*Forklaring:* Vi bruger skuffeprincippet. Der er brug for 18 forskellige summer af 8 af tallene  $0$ ,  $1$  og  $-1$ . Men der kan højst dannes 17 forskellige summer, idet den mindst mulige sådanne sum er  $(-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -8$  og den størst mulige  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$ .

*Lille Georgs julekalender 08*

**11. december**

Hvad er kvadratroden af 12345678987654321 ?

*Svar:* 111111111

*Forklaring:*

$$11^2 = 121,$$

$$111^2 = 12321,$$

$$1111^2 = 1234321,$$

...

$$111111111^2 = 12345678987654321.$$

*Lille Georgs julekalender 08*

***12. december***

Et tog kører fra St. Petersborg til Moskva med 60 km/h. Et andet tog kører fra Moskva til St. Petersborg med 40 km/h. Hvor langt er de to tog fra hinanden en time før de mødes?

*Svar:* 100 km

*Forklaring:* På det pågældende tidspunkt er det ene tog 60 km fra mødestedet og det andet 40 km derfra.

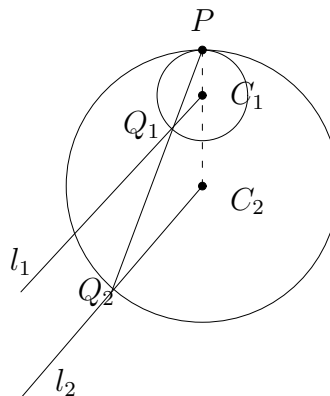
Lille Georgs julekalender 08

13. december

To cirkler med centrum henholdsvis  $C_1$  og  $C_2$  tangerer hinanden indvendigt i et punkt  $P$ . En fælles korde fra  $P$  skærer cirklerne i punkterne  $Q_1$  og  $Q_2$  henholdsvis. Linjen gennem  $C_1$  og  $Q_1$  betegnes  $l_1$ , og linjen gennem  $C_2$  og  $Q_2$  betegnes  $l_2$ . Hvad kan man udlede om skæringspunktet mellem  $l_1$  og  $l_2$ ?

Svar: At det ikke eksisterer, da linjerne er parallelle.

Forklaring:



Trekkanterne  $PC_1Q_1$  og  $PC_2Q_2$  er ligebenede og har  $\angle P$  fælles. Altså er  $\angle Q_1 = \angle Q_2$  (begge er lig med  $\angle P$ ). Linjerne  $l_1$  og  $l_2$  danner da samme vinkel med korden og er dermed parallelle.

*Lille Georgs julekalender 08*

**14. december**

I en by er der en metrolinje der har tolv stationer. Alle stationerne ligger med samme indbyrdes afstand. Vi ved at der er 2400 meter mellem den fjerde og den syvende station. Hvor lang er hele linjen?

*Svar:* 8800 meter

*Forklaring:* Mellem hver station er der  $2400/3 = 800$  meter. Mellem den første og den sidste er der derfor  $11 \cdot 800 = 8800$  meter.

*Lille Georgs julekalender 08*

**15. december**

John står i kø for at komme ind til en fest. Han er nr. 2008 i køen !  
Vagterne lukker folk ind i grupper. Den første gruppe er på 1 person, den næste på 2 personer, den tredje gruppe er på 3 personer osv. Hvor mange vil der være i den gruppe der bliver lukket ind sammen med John?

*Svar:* 63

*Forklaring:* Vi søger det naturlige tal  $n$  med

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) < 2008 \leq 1 + 2 + \dots + n .$$

Vi udnytter formlen

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2} .$$

Vi skal opnå  $\frac{n(n+1)}{2} \approx 2008$ , dvs.  $n^2 + n \approx 4016$ .

Da  $60^2 = 3600$ , prøves med tal lidt større end 60.

Vi ser at

$$62^2 + 62 = (60^2 + 2^2 + 2 \cdot 60 \cdot 2) + 62 = (3600 + 4 + 240) + 62 < 4016, \text{ mens}$$
$$63^2 + 63 = (60^2 + 3^2 + 2 \cdot 60 \cdot 3) + 63 = (3600 + 9 + 360) + 63 > 4016.$$

Det søgte antal er altså 63.

*Ekstraopgave:* Bevis formlen.

*Lille Georgs julekalender 08*

**16. december**

Flyt én tændstik så ligningen bliver korrekt.

III = X

*Svar:*

F.eks.

T I = X

eller

II = XI

*Forklaring:* Læs tallene som almindelige tal eller romertal.



*Lille Georgs julekalender 08*

**17. december**

Hvad er summen af primfaktorerne i tallet  $2^{16} - 1$ ?

*Svar:* 282

*Forklaring:* Tallet faktorerises:

$$2^{16} - 1 = (2^8 + 1) \cdot (2^8 - 1) = 257 \cdot (2^4 + 1) \cdot (2^4 - 1) = 257 \cdot 17 \cdot (2^2 + 1) \cdot (2^2 - 1) = 257 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 3.$$

Primfaktorerne 257, 17, 5 og 3 adderes:  $257 + 17 + 5 + 3 = 282$ .

*Lille Georgs julekalender 08*

**18. december**

Tobias har lige mange søstre og brødre, men hver af hans søstre har dobbelt så mange brødre som søstre. Hvor mange søskende er der i familien?

*Svar:* 7 søskende

*Forklaring:* Der er 4 drenge og 3 piger. Hver dreng har da 3 søstre og 3 brødre, mens hver pige har 4 brødre og 2 søstre.

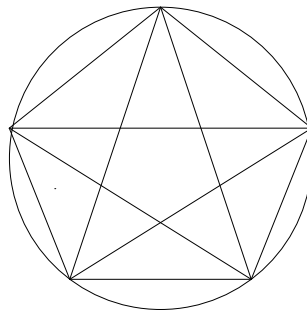
*Lille Georgs julekalender 08*

**19. december**

Langs kanten af en stor rund kage markeres fem punkter med samme indbyrdes afstand. Carlos skærer kagen igennem langs alle linjer som forbinder to af punkterne. Hvor mange stykker bliver der?

*Svar:* 16

*Forklaring:*



*Ekstraopgave:* Hvor mange stykker bliver der hvis kun 2, 3 eller 4 punkter markeres? Er der et system? Hvorfor forholder det sig sådan?

*Lille Georgs julekalender 08*

**20. december**

Hvad er der gået galt med rækkefølgen her?



*Svar:* Figur nr. 5 og 7 er blevet byttet om.

*Forklaring:* Figureerne fremkommer af talsymbolerne ved spejling.



*Lille Georgs julekalender 08*

***21. december***

Af cifrene 1, 2, ..., 9 skal der dannes primtal således at hvert af de ni cifre bruges netop en gang. Herefter skal primtallene lægges sammen. Hvad er den mindst mulige sum der kan fremkomme?

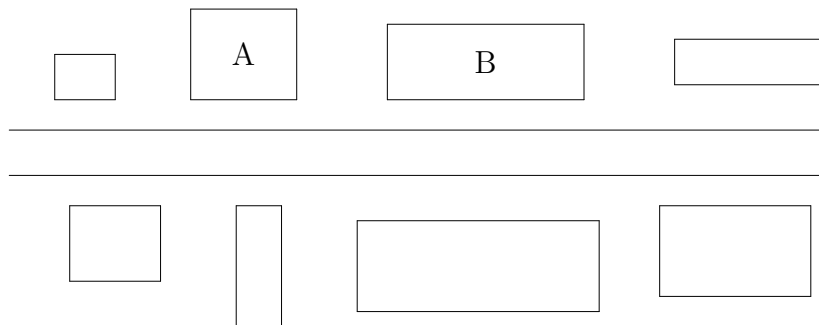
*Svar: 207*

*Forklaring:* Cifrene 4, 6 og 8 kan ikke forekomme som enere i primtal. De må derfor optræde som mindst tiere. Hvis vi kan danne primtal med cifrene 4, 6 og 8 på tierpladser og de øvrige cifre 1, 2, 3, 5, 7 og 9 på enerpladser, må deres sum være minimal. Og det kan vi: f.eks.  $2 + 5 + 7 + 43 + 61 + 89 = 207$ . (Der er flere muligheder for at opnå denne sum. Men den kan naturligvis ikke blive lavere af en eventuel ombytning af cifre inden for enercifrene eller inden for tiercifrene.)

*Lille Georgs julekalender 08*

***22. december***

Skitsen viser et udsnit af Julevej, hvor A bor i nummer 24.  
I hvilket nummer bor B?



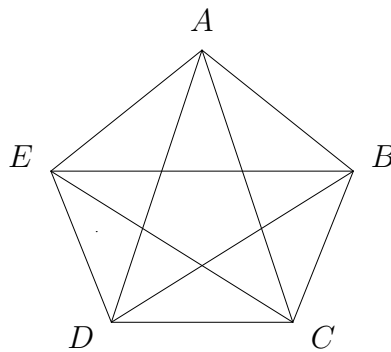
*Svar:* Nr. 22

*Forklaring:* De lige numre vokser i kørselsretningen.

Lille Georgs julekalender 08

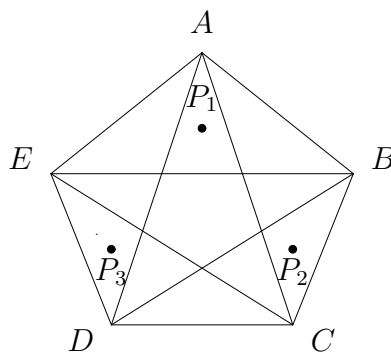
23. december

Betragt en regulær femkant  $ABCDE$ . Er det muligt at afsætte tre punkter  $P_1$ ,  $P_2$  og  $P_3$  inden i femkanten på en sådan måde at enhver trekant med vinkelspidser i tre af punkterne  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  og  $E$  indeholder et af punkterne  $P_1$ ,  $P_2$  og  $P_3$ ?



Svar: Ja

Forklaring: F. eks. således:



*Lille Georgs julekalender 08*

**24. december**

En matematikinteresseret edderkop beslutter den 1. december om morgenen at den hver dag i december vil kravle det antal meter som datoen angiver, enten opad eller nedad. Den 1. december kravler den altså enten 1 meter op eller 1 meter ned, den 2. december enten 2 meter op eller 2 meter ned osv. Er det muligt for edderkoppen at befinde sig på sit udgangspunkt når vi når til a) juleaften, b) nytårsaften?

*Svar:* a) Ja. b) Ja.

*Forklaring:* Vi indlægger en lodret akse og regner i hele meter. Hvis edderkoppen kravler stykket  $x$  opad, hhv. nedad, fra en position  $s$ , ændres positionen til  $s + x$ , hhv.  $s - x$ . Spørgsmålene er derfor om det er muligt at vælge fortegn således at a)  $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \dots \pm 24$ , og b)  $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \dots \pm 31$  kan blive 0.

Bemærk at det altid er muligt at vende tilbage til udgangspunktet i løbet af fire på hinanden følgende dage  $n, n + 1, n + 2, n + 3$  idet

$$n - (n + 1) - (n + 2) + (n + 3) = 0 \quad .$$

a) Da 24 er deleligt med 4, kan vi opnå at positionen ikke ændres, ved at sige

$$(1 - 2 - 3 + 4) + (5 - 6 - 7 + 8) + \dots + (21 - 22 - 23 + 24) = 0 \quad .$$

b) Næsten samme metode bruges ved den 31. december, dog først fra og med 4. december. De tre første dage klares lidt anderledes:

$$1 + 2 - 3 + (4 - 5 - 6 + 7) + (8 - 9 - 10 + 11) + \dots + (28 - 29 - 30 + 31) = 0 \quad .$$

*Ekstraopgave:* For hvilke datoer i december er svaret nej?