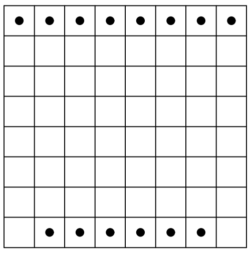
Lille Georgs julekalender 07

1. december

Hvor mange løbere kan der opstilles på et skakbræt uden at de truer hinanden?

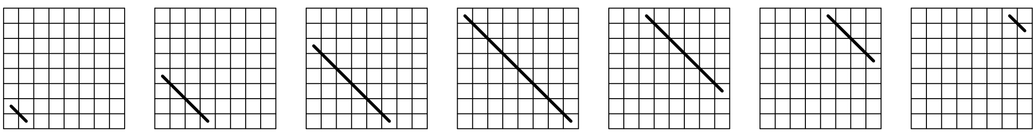
Svar: 14

Forklaring: Der kan godt stå 14, f.eks. sådan:



Men kunne der stå flere hvis man stillede dem endnu snedigere op? Lad os bevise at det kan der ikke.

Vi ser først på de sorte felter. Se på de syv viste skrålinier:



På hver af dem kan der højst stå én løber hvis de ikke skal true hinanden. Altså kan der, ligegyldigt hvordan man gør, højst opstilles syv sorte løbere. Ved at se på hvide skrålinier på den anden led ses at der højst kan anbringes syv hvide løbere. Altså kan der ikke på nogen måde opstilles mere end 14 løbere ialt.

Lille Georgs julekalender 07

2. december

Hvilket ord er et tal?

SNE DIS VIN MIX MEL

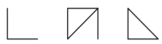
Svar: MIX

Forklaring: MIX er tallet 1009 skrevet som romertal (da jo M betegner 1000, I betegner 1, og X betegner 10, og da et mindre tal før et større betyder at det mindre skal trækkes fra).

Lille Georgs julekalender 07

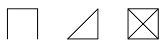
3. december

En mystisk kileskrift er tydet!



betyder 243, og

betyder 524.
Hvad står der her?



Svar: 336

Forklaring: Hvert symbol er sammensat af et antal streger. Ud fra eksemplerne gætter vi på at antallet af streger angiver cifferet i tallet (og bemærker at nogle cifre åbenbart kan angives på flere forskellige måder). Vi formoder derfor at den ukendte tekst er 336.

Lille Georgs julekalender 07

4. december

Hvad er det næste i rækken?

& , £ , &£ , £&£ , &££&£ , £&£&££&£ , ...

Svar: &££&££&£&££&£

Forklaring: Fra og med det tredie "ord"fremkommer hvert ord i rækken ved at de to foregående opskrives i forlængelse af hinanden.

Lille Georgs julekalender 07

5. december

Se på ordet

JULEKALENDER

Hvor mange forskellige ord kan man lave ved at omordne bogstaverne?
Her er to eksempler: DUNEJARKELLE , NRJDLAKEEUEL.

Svar: 39916800

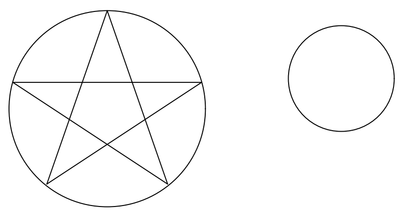
Forklaring: Hvis alle de tolv bogstaver i ordet var forskellige, ville der kunne dannes $12\,! = 479001600$ ord. (Man kunne nemlig på 12 måder vælge det første bogstav, dernæst på 11 måder det næste, på 10 måder det tredie osv, dvs. der kunne ifølge multiplikationsprincippet dannes $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 12!$ ord.)

Imidlertid er nogle af bogstaverne ens. Vi har derfor fået talt nogle af ordene med flere gange. Hvis de to L'er i et ord ombyttes, ændres ordet ikke. Og ganske tilsvarende ændres ordet ikke hvis de tre E'er skifter plads indbyrdes. De tre E'er kan placeres på 6 forskellige måder i forhold til hinanden, de to L'er på 2 måder. Alt i alt har vi derfor fået talt hvert ord med $2 \cdot 6 = 12$ gange. Vi skal derfor dividere det fundne antallet med 12. Resultatet bliver $12!/12 = 11! = 39916800$.

Lille Georgs julekalender 07

6. december

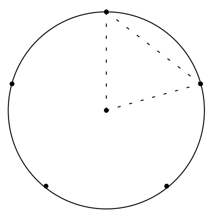
I en cirkel er indskrevet en regulær femstjerne:



Det er forholdsvis tydeligt at femstjernen kan dækkes af fem cirkelskiver med den halve radius.
Men kunne man nøjes med fire hvis man anbringer dem på en praktisk måde?

Svar: Nej

Forklaring: End ikke de fem punkter på cirkelperiferien ville kunne dækkes af fire cirkelskiver. Afstanden mellem sådanne to nabopunkter er nemlig større end radius i den store cirkel (fordi den tilsvarende centervinkel er større end 60°), dvs. større end diameteren i de små cirkelskiver. Hver lille cirkelskive kan derfor ikke dække mere end et af disse fem punkter. Altså er der brug for mindst fem små cirkler.



Lille Georgs julekalender 07

7. december

I et firma med en meget indviklet ledelsesstruktur har chefen givet sine ansatte numre. Nummereringen følger dette princip: En ansat med nummeret n skal tage imod ordrer fra en ansat med nummeret m netop hvis n går op i m. Eksempelvis skal den ansatte med nummeret 6 tage imod ordrer fra den ansatte med nummeret 66, men ikke fra ham med nummeret 253.

Sekretæren har af gode grunde nummeret 1. Chefen selv har nummeret 10626.

Hvor mange ansatte, inklusive chefen, kan der efter det oplyste højst være i dette firma?

Svar: 32

Forklaring: Vi går ud fra at alle ansatte skal tage imod ordrer fra chefen. Derfor går alle de ansattes numre op i 10626. Vi skal altså finde antallet af divisorer i tallet 10626.

Tallet opløses i primfaktorer: $10626 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$. Enhvert tal der går op i 10626, fremkommer nu ved kombination af disse primtal (f.eks. er $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ og $253 = 11 \cdot 23$).

Vi kan optælle divisorerne ved primtal for primtal at tænke på om det skal med eller ikke med når vi danner den pågældende divisor. Det giver ialt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ mulige divisorer. (Hvis ingen faktorer er med i produktet, regnes det for lig med 1, svarende til sekretæren; medtages alle faktorer, fremkommer chefens nummer.)

Lille Georgs julekalender 07

8. december

Hvordan er det nu man staver til dette ord?
Er det parrentes, parentes, parantes, perentes eller parrantes?

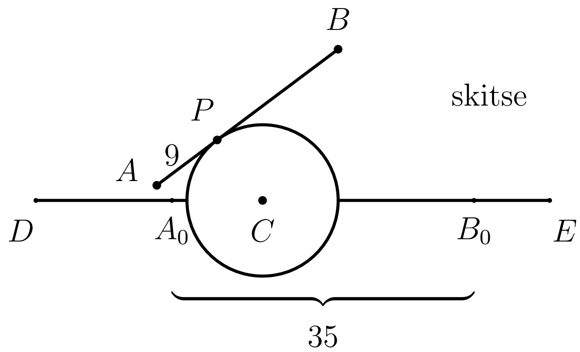
Svar: Sådan: parentes

Forklaring: Lær det nu!

Lille Georgs julekalender 07

9. december

På en lodret drejelig skive med radius 12 er der i punktet P fastgjort en stang AB. Figuren viser skiven og et tværsnit DE af en bordplade i højde med skivens centrum C. Når skiven drejes mod venstre, vil stangens venstre endepunkt A på et tidspunkt ramme bordpladen i punktet A_0; tilsvarende vil B støde mod bordet i punktet B_0 hvis skiven drejes tilstrækkelig langt mod højre. Afstanden mellem A_0 og B_0 er 35. Stykket AP har længden 9. Hvad er stangens samlede længde?



Svar: 25

Forklaring: Pythagoras i venstre yderstilling giver $|AC| = 15$. Så er $|CB| = 35 - 15 = 20$. Pythagoras i højre yderstilling giver $|PB| = 16$. Så er stangens samlede længde 25.

Lille Georgs julekalender 07

10. december

Findes der ét, intet eller uendelig mange tal som opfylder følgende: Afrundet til 3 decimaler er tallet lig med 17,725, men afrundet til 2 decimaler er det lig med 17,72 ?

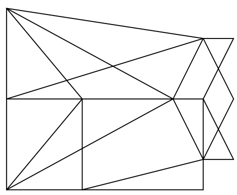
Svar: Uendelig mange

Forklaring: Alle tal, hvis decimalfremstilling starter med 17,7245... (eller 17,726... eller 17,7247... eller 17,7248... eller 17,7249...), vil opfylde det ønskede.

Lille Georgs julekalender 07

11. december

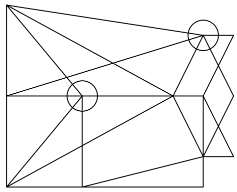
Kan denne figur tegnes i en streg?



Svar: Ja

Forklaring: I spørgsmålet er underforstået at man ikke må følge den samme streg flere gange.

Det kan lade sig gøre ved at du begynder i et af de knudepunkter der er markeret med en cirkel. Du vil så slutte i det andet af disse punkter.



Det afgørende er at alle de øvrige punkter har lige *valens*, dvs. at der udgår et lige antal streger fra dem. Dette sikrer at du, hver gang du ankommer til et punkt, har mulighed for at forlade det igen ad en anden streg.

De to markerede punkter har ulige valens. Takket være at der kun er to af den slags punkter, kan figuren tegnes i én streg ved at man starter og slutter dér.

Lille Georgs julekalender 07

12. december

I et sædvanligt dominospil er der 28 brikker. De kan ligge pænt i fire lag i en kasse med syv brikker i hvert lag.

Hvilken kasse vil du foreslå til et udvidet dominospil hvor der kan være op til ni øjne på hver halvdel af brikken?

Svar: F.eks. en æske med plads til 5 lag à 11 brikker.

Forklaring: Dominospillet indeholder en brik af hver type. De sædvanlige 28 brikker er: 7 med ens halvdele (med fra 0 til 6 øjne) og 21 med forskellige halvdele. (Hvorfor 21? F.eks. på følgende måde: vælg først antal øjne på den ene del, derefter på den anden del; det giver $7 \cdot 6 = 42$; dette tal skal divideres med 2, fordi hver brik er medtalt 2 gange.)

Med op til ni øjne er der ialt 55 brikker, nemlig 10 brikker med ens halvdele og $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ med forskellige halvdele.

Lille Georgs julekalender 07

13. december

Når nissefar sætter alle sine kikkerter i forlængelse af hinanden, plejer den at virke den som én stor kikkert der forstørrer i forholdet 1 : 6480 !

Men i nattens mulm og mørke har lille Nis pillet ved konstruktionen og vendt en af kikkerterne om, så nu forstørrer den store kikkert kun med en faktor 405.

Hvilken forstørrelse giver den forkert anbragte kikkert?

Svar: Forstørrer med en faktor 4

Forklaring: Kald den forkert anbragte kikkerts forstørrelsesfaktor for k. Hvis kikkerten blot blev fjernet, ville forstørrelsesfaktoren 6480 ændres til $6480/k$. At den tilføjes, men vendt om, svarer til at tilføje en kikkert med forstørrelsesfaktoren $1/k$. Altså fås en samlet forstørrelsesfaktor på $6480/k \cdot 1/k = 6480/k^2$. Dette tal er lig med 405. Altså er $k^2 = 6480/405 = 16$ og dermed $k = 4$.

Lille Georgs julekalender 07

14. december

Peters lillesøster sorterer sine legetøjsbogstaver fint.

I den første kasse anbringer hun bl.a. P, A, O og Q, i den anden har hun B og Ø, og i den tredie er der foreløbig lagt E, G, T, U og K.

I hvilken kasse skal R anbringes?

Svar: I den første

Forklaring: Bogstaverne sorteres efter antallet af huller. Bogstaverne i første kasse har 1 hul, bogstaverne i den anden kasse har 2, og dem fra den sidste kasse ingen.

Lille Georgs julekalender 07

15. december

Som bekendt er
$$\sqrt{a+b}$$
ikke det samme som
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}$$
- i hvert fald normalt ikke.
For hvilke værdier af a og b *er* de to udtryk faktisk ens?

Svar: Når mindst et af tallene a og b er 0, ellers ikke.

Forklaring: Klart at ligningen er korrekt hvis et af tallene er 0.

Omvendt er dette nødvendigt for at de to udtryk er ens. For at $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ skal være lig med $\sqrt{a+b}$, skal $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ nemlig være lig med
$$a+b \quad .$$
Men der gælder altid at $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ er lig med
$$a+b+2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad .$$
Altså skal $2\sqrt{a}\sqrt{b}$ være lig med 0, dvs. $a=0$ eller $b=0$.

Lille Georgs julekalender 07

16. december

Hans sidder og skriver tal på et stykke papir: 1, 2, 3, 4, 5 osv. Han holder øje med hvor mange gange han bruger hvert af cifrene 1, 2 og 3.

Han påstår at lige meget hvor stort et tal k du nævner, så kan han finde et endnu større tal n sådan at når han har skrevet alle tallene fra 1 til n, så har han brugt cifrene 1, 2 og 3 præcis lige mange gange.

Har han ret?

Svar: Ja

Forklaring: Hver gang man når til et af tallene 9, 99, 999, 9999, ... , har man skrevet cifrene 1, 2 og 3 (og i øvrigt også cifrene 4, ..., 9) præcis lige mange gange. Og uanset hvor stort et tal k der nævnes, findes der tal af denne nævnte art som er større end k.

Lille Georgs julekalender 07

17. december

En snemand der består af en stor og en lille snebold (med radius en trediedel af den store) over på hinanden, smelter.

Hvor mange gryder fylder smeltevandet fra snemanden ialt når hovedet alene giver vand svarende til to hele gryder?

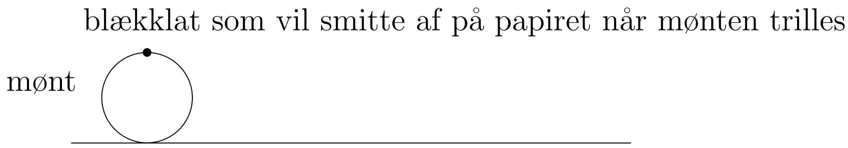
Svar: 56

Forklaring: Da den store kugle radius er 3 gange så stor som den lilles, er dens rumfang $3^3 = 27$ gange så stort. Smeltevandet fra den store kugle fylder altså $27 \cdot 2 = 54$ gryder, altså ialt 56 gryder smeltevand.

Lille Georgs julekalender 07

18. december

Hvilken slags kurve fremkommer på papiret når mønten med blækklatten trilles langs stregen? Bliver det en siksaklinie, en vandret linie, en blød bølget streg, en serie af buer eller en blød kurve med små sløjfer?



Svar: En serie af buer

Forklaring: Den fremkomne kurve er kendt matematisk kurve, som kaldes en *cykloide.*

Lille Georgs julekalender 07

19. december

En lidt nørdet drillenisse er gået i gang med at erstatte datoerne på julekalenderen med tal efter et skummelt system, men han har ikke fået gjort det færdigt. Hvad havde han tænkt sig at der skulle stå ud for den 19. december?

1. december: 2
2. december: 2
3. december: 3
4. december: 4
5. december: 3
6. december: 4
7. december: 3

9. december: 2

12. december: 4
13. december: 7

18. december: 5

20. december: 4

Svar: 6

Forklaring: Tallet angiver antallet af bogstaver i det tilsvarene talord: en 2, to 2, tre 3, fire 4, fem 5, seks 4, syv 3, ni 2, tolv 4, tretten 7, atten 5, tyve 4. Derfor: nitten 6.

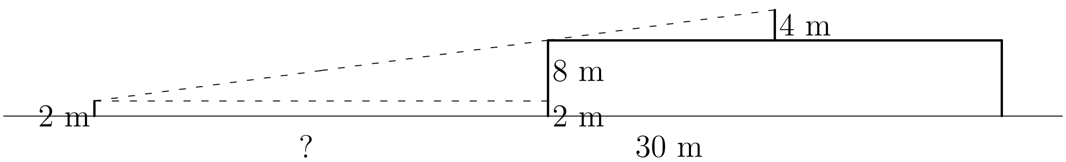
Lille Georgs julekalender 07

20. december

Midt på det flade tag af en 10 meter høj cirkelrund bygning med radius 30 meter er anbragt en 4 meter høj flagstang med en lille vimpel. Hvor langt væk fra bygningen skal en to meter høj person stå for at kunne se vimplen?

Svar: 60 meter

Forklaring: Svaret fås ud fra de to retvinklede trekanter på figuren. De er ensvinklede med sideforholdet 1:2.

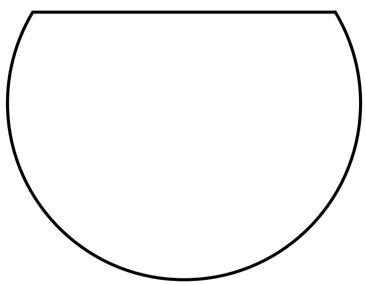


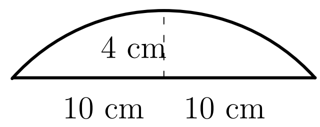
Lille Georgs julekalender 07

21. december

En solid trækugle saves over i en stor og en lille del. Den lille del har radius 10 cm og højden 4 cm.

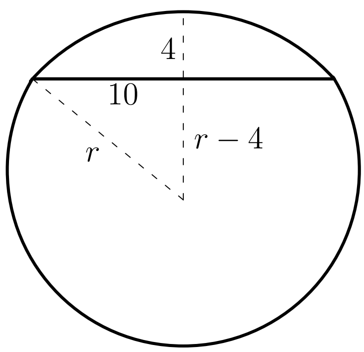
Hvad var radius i den oprindelige kugle?





Svar: $14\frac{1}{2}$ cm

Forklaring: Den oprindelige kugles radius r bestemmes vha. Pythagoras: $r^2 = 10^2 + (r-4)^2$ som giver $8r = 116$, dvs. $r = 14\frac{1}{2}$.



Lille Georgs julekalender 07

22. december

Marie skriver noter til de forskellige fag med forskellige farver, men ikke nok med det: for hver kombination af to eller flere fag der arbejder sammen i et flerfagligt projekt, får dette fagsamarbejde en farve for sig selv. Hun bruger kongeblå til historie, turkis til fransk-idræt, solgul til kemi-historie-musik-dansk osv osv osv uden noget særlig gennemskueligt system.

Ialt har Marie otte forskellige fag. Er 64 farveblyanter nok?

Svar: Nej

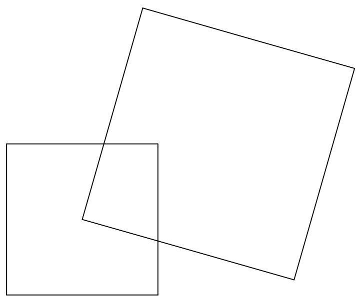
Forklaring: Der findes $2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$ kombinationer af et eller flere fag. Et fagsamarbejde karakteriseres ved hvilke fag der skal med, og mulighederne optælles lettest ved at man fag for fag vælger om det er med eller ej: Det giver $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^8$ muligheder, idet man for hvert fag vælger om det skal med eller. Til sidste trækkes 1 fra svarende at ingen af fagene er valgt. Så vi skal op på 255 farver for at have nok.

Lille Georgs julekalender 07

23. december

Figuren viser to kvadrater der lapper ind over hinanden. Det store kvadrat har sidelængde 5, det lille sidelængde 3. Det store kvadrat har et hjørne i det lille kvadrats centrum. Siderne skærer hinanden i en vinkel på 75°.

Hvad er forskellen mellem arealerne af de ikke-overlappende dele af de to kvadrater?



Svar: 16

Forklaring: Arealerne af de to kvadrater er hhv. 9 og 25. Lad A betegne arealet af overlappet. Differensen mellem de to ikke-overlappende dele af kvadraterne er da

$$(25 - A) - (9 - A) = 25 - 9 = 16 \quad .$$

Lille Georgs julekalender 07

24. december

Lad os kalde et tal der er deleligt med 24, for et *juletal*. Hans sidder og danner ni-cifrede juletal hvori alle cifrene fra 1 til 9 indgår. Du kommer og vil være med. Hans påstår at lige meget hvilke af cifrene du beslutter at anbringe som andet, femte og ottende ciffer, kan han anbringe de andre så der fremkommer et juletal.

Har han ret?

Svar: Nej

Forklaring: Ethvert ni-cifret tal dannet af alle ni cifre er automatisk deleligt med 3 (fordi tværsummen er det). Betingelsen for at 24 går op i et tal, er at så vel 3 som 8 går op i tallet (fordi primfaktoropløsningen af 24 er $24 = 3 \cdot 2^3$). At få 3 til at gå op, er ikke noget problem: uanset rækkefølgen af de ni cifre, vil 3 gå op i tværsummen og dermed i tallet.

Men det er ikke sikkert at vi kan få 8 til at gå op. Faktisk kan man risikere at ikke engang 4 går op. Betingelsen for at 4 går op i et tal, er at 4 går op i tallet dannet af de to sidste cifre.

Hvis du nu placerer f.eks. cifrene 8, 6 og 4 på anden, femte og ottende plads, vil det ikke være muligt at få 4 til at gå op i tallet: Det skal jo være lige, altså må 2 anbringes på niende plads, og dermed ender tallet på 42, som ikke er deleligt med 4.