Lille Georgs julekalender 06

1. december

Hvad skal der stå på den tomme plads?

11001 - 10101 - 10011
10111 - 11011 - 11101
11000 - 10100 -

Svar: 10010

Forklaring: Ydercifrene forbliver de samme. Ciffer nr. 2 rykker mød højre ved først at bytte plads med ciffer nr. 3 og derefter med ciffer nr. 4.

Lille Georgs julekalender 06

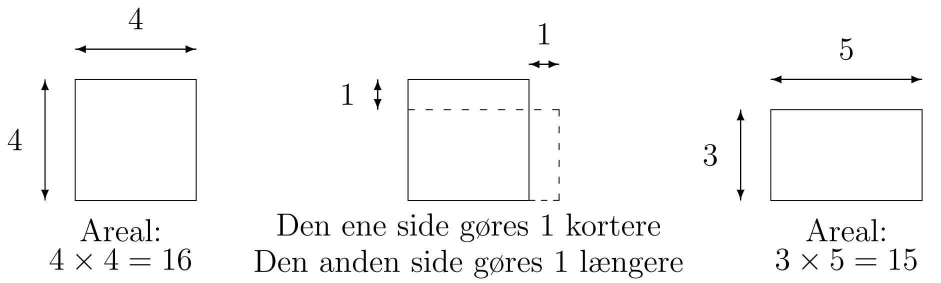
2. december

Et kvadrat laves om til et rektangel ved at den ene side gøres et vist stykke kortere, og den anden side gøres det samme stykke længere.

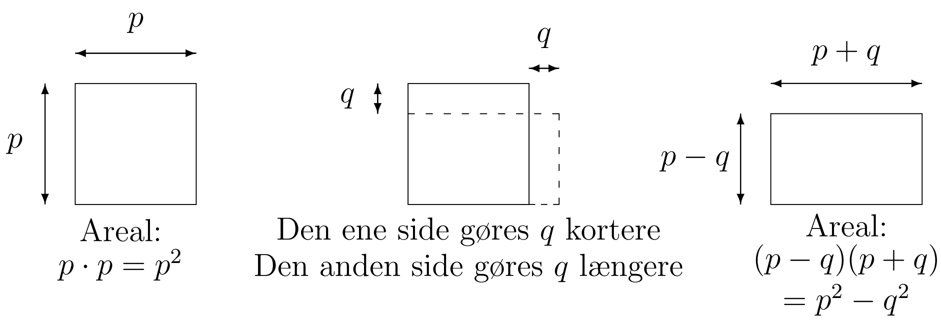
Hvad sker der med arealet: bliver det større, bliver det mindre, eller ændres det ikke?

Svar: Det bliver mindre.

Forklaring: Et eksempel:



Og det er faktisk generelt:



Kommentar: Omkredsen ændres ikke. Men når rektanglet ikke længere er et kvadrat, omsluttes et mindre areal. Vi har altså set at for en fast omkreds er et kvadrat det rektangel der har det største areal. (Hvis man have et endnu større areal ud af en given omkreds, skal man vælge en cirkel.)

Lille Georgs julekalender 06

3. december

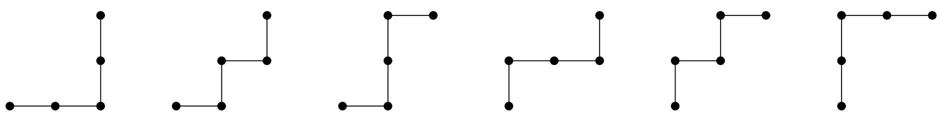
Maries lillebror har lånt hendes TI-83. Han leger at han er et meget lille dyr der skal fra tast 0 til tast 9 i fem hop ved at hoppe fra tast til tast. Han bruger kun taltasterne og må kun hoppe fra nabotast til nabotast vandret eller lodret.

På hvor mange måder kan turen gøres?

7	8	9
4	5	6
1	2	3
0	·	(-)

Svar: På 6 måder.

Forklaring: Første hop går nødvendigvis til tast 1. Herefter er der følgende mulige ruter:



VVLL VLVL VLLV LVVL LVLV LLVV

Ruterne kan beskrives som angivet: her står V for vandret hop og L for lodret hop.

En rute er fastlagt ud fra rækkefølgen af de to vandrette og to lodrette hop. Antallet af mulige ruter er derfor lig med antallet af måder at vælge to pladser (til de vandrette hop) ud af ialt fire pladser (de ialt fire hop), med andre ord lig med antallet af 2-kombinationer af en 4-mængde.

Kommentar: Antallet af r-kombinationer af en n-mængde betegnes $\mathrm{K}(n,r)$ eller $\binom{n}{r}$. For disse såkaldte *binomialkoefficienter* gælder bl. a. formlen

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad .$$

For $n = 4$ og $r = 2$ fås $\mathrm{K}(4,2) = 6$.

Lille Georgs julekalender 06

4. december

Hver dag ringer Jan til sin mor og muligvis også til en eller flere af sine 25 venner. Han varierer det så han aldrig ringer til *præcis* den samme mængde af personer.

Hvor mange dage kan han blive ved med det?

Bemærkning: Læg mærke til at der i opgaven ikke står "antal", men "mængde". Kombinationerne {mor, Anders, Bo } og {mor, Cecilie, Danny } regnes altså for forskellige muligheder, selv om der er samme antal.

Svar: 33554432 dage.
(Det er er et pænt stykke over 90.000 år, så Jan behøver ikke at frygte at kombinationsmulighederne slipper op lige med det første.)

Forklaring 1: (Den besværlige) Antal muligheder med 0 venner: 1 mulighed. Antal muligheder med 1 ven: 25 muligheder.
Antal muligheder med 2 venner: Valg af 2 venner ud af 25 kan foretages på K(25,2) = 300 måder.
Antal muligheder med 3 venner: Valg af 3 venner ud af 25 kan foretages på K(25,3) = 2300 måder.
Osv. osv.
Og så lægger vi sammen til sidst og finder resultatet 33554432.

Forklaring 2: (Den smarte) Vi optæller mulighederne anderledes. Hver dag tænker man igennem ven for ven: skal han med eller ej? For hver ven er der således 2 muligheder. Ialt fås (multiplikationsprincippet) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^{25} = 33554432$ forskellige kombinationsmuligheder.

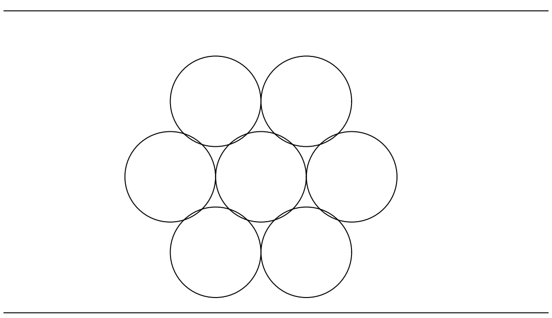
Kommentar: Bruges de to forskellige metoder ovenfor til at optælle antallet af delmængder af en n-mængde, fremkommer formlen

$$\sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} = 2^n \quad .$$

Lille Georgs julekalender 06

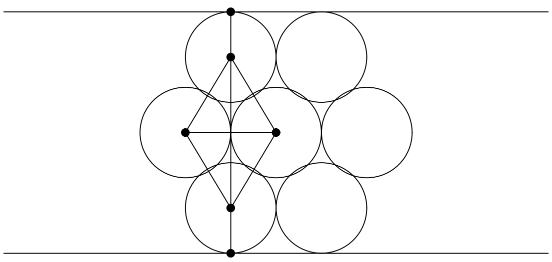
5. december

Seks mønter lægges i ring rundt om en syvende. Hele figuren klemmes mellem to parallelle linier. Er det muligt at lægge linierne med indbyrdes afstand mindre end 5,5 møntradier?



Svar: Ja.

Forklaring:



Lad os antage at mønternes radius er 1 (vi regner altså i enheden "møntradier"). Når linierne klemmes om mønterne som vist, er afstanden mellem dem

$$1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 = 2 + 2\,\sqrt{3} \;\approx\; 5,464 < 5,5 \quad .$$

Tallet $\sqrt{3}$ fremkommer f.eks. vha. Pythagoras i en af de viste retvinklede trekanter med hypotenuse 2 og katete 1.

Lille Georgs julekalender 06

6. december

Lille A vil gerne have vekslet en tyver. Lille C har masser af tokroner, femkroner og tikroner.

På hvor mange forskellige måder kan tyveren veksles?

Svar: På 6 måder.

Forklaring:

$$\begin{gathered}10+10\\10+5+5\\10+2+2+2+2+2\\5+5+5+5\\5+5+2+2+2+2+2\\2+2+2+2+2+2+2+2+2+2\end{gathered}$$

Lille Georgs julekalender 06

7. december

Hvilket dyr er anbragt forkert?

pindsvin, søhest, zebra, løve, abe, kænguru, bi

Det forkert anbragte dyr er dyr nr.:

Svar: Dyr nr. 6.

Forklaring: Dyrene står - bortset fra kænguru, som er anbragt forkert - i aftagende rækkefølge efter antallet af bogstaver i dyrets navn: 8 bogstaver, 6 bogstaver, 5 bogstaver, 4 bogstaver, 3 bogstaver, 7 bogstaver, 2 bogstaver.

Lille Georgs julekalender 06

8. december

Cecilie har 12 pebernødder.

- Hør her, siger Danny, hvad siger du til det her? Først giver jeg dig halvdelen af mine pebernødder, og derefter giver du mig halvdelen af dem du så har.

- Det kan der vel ikke ske noget ved, tænker Cecilie og accepterer forslaget.

De gør som aftalt. Og nu sidder Cecilie tilbage med 11 pebernødder...

Hvor mange har Danny?

Svar: 21

Forklaring: Fra start havde Danny x pebernødder. Dem fik Cecilie halvdelen af, så dermed havde hun $12 + \frac{x}{2}$ pebernødder. Hun gav Danny halvdelen af dem og sidder nu tilbage med den anden halvdel $\frac{1}{2}(12 + \frac{x}{2})$, altså med $6 + \frac{x}{4}$ stk. Vi ved at dette antal er lig med 11, altså at $6 + \frac{x}{4} = 11$. Ved at løse denne ligning kan vi finde x:

$$6 + \frac{x}{4} = 11 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{4} = 5 \;\Leftrightarrow\; x = 20 \quad .$$

Fra start havde Danny altså 20 pebernødder. Da det samlede antal er ikke ændret undervejs, og Cecilie alt i alt har mistet 1 pebernød, må Danny have vundet 1. Han har altså nu 21 pebernødder.

Lille Georgs julekalender 06

9. december

Læs kodebudskabet og svar JA med samme kode:

14 2 21 6 14 2 21 10 12
6 19
6 21
5 6 11 13 10 8 21
7 2 8 !

Svar: 11 2

Forklaring: Der står selvfølgelig MATEMATIK ER ET DEJLIGT FAG, og koden består i at give hvert bogstav dets nummer i alfabetet plus 1 (så altså A=2, B=3, C=4 osv.) Med denne kode skal JA skrives 11 2 .

Lille Georgs julekalender 06

10. december

Peter er meget forkælet. Den første december får han én kalendergave, den anden december får han to, den tredie december får han tre, osv lige til juleaften.

Hvor mange kalendergaver får han ialt?

Svar: 300

Forklaring: Han får

$$1 + 2 + 3 + ... + 22 + 23 + 24$$

gaver ialt. Det er let at regne tallet ud ved lægge sammen i en anden rækkefølge. Vi tager det første tal sammen med sidste (det giver 25), det andet tal sammen med det næstsidste (det giver også 25) osv. og får

$$(1 + 24) + (2 + 23) + (3 + 22) + ... + (12 + 13) \quad ,$$

altså ialt 12 gange 25 = 300.

Kommentar: Idéen ovenfor kan bruges til at bevise formlen

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2} \quad ,$$

som gælder for alle naturlige tal n.

Præcis som før summeres leddene parvis: det første og det sidste, det andet og det næstsidste osv., og hver gang er summen lig med $n + 1$. Da vi tager to led ad gangen, skal tallet $n+1$ bruges ialt $\frac{n}{2}$ gange. Ialt fås resultatet $\frac{n}{2} \cdot (n + 1)$ som påstået.

Lille Georgs julekalender 06

11. december

Hvordan skrives 27 i tretalssystemet?

Svar: 1000

Forklaring: I titalssystemet angiver cifrene (læst fra højre) som bekendt antal enere, antal tiere, antal hundreder, antal tusinder osv. Her er 10 enere = en tier, 10 tiere = en hundreder, 10 hundreder = en tusinder osv.

I tretalssystemet bundter vi hver gang vi når 3 ting: 3 enere = en treer, 3 treere = en nier, 3 niere = en syvogtyver, og cifrene (læst fra højre) angiver antal enere, antal treere, antal niere, antal syvogtyvere. Tallet 27 består af 1 syvogtyver, 0 niere, 0 treere, 0 enere og skrives derfor 1000.

Kommentar: I titalssystemet bruges de ti cifre 0, 1, 2, ..., 9. Tallet 10 skrives med to cifre. I tretalssystemet har man kun brug for de tre cifre 0, 1, 2. Så snart man når til 3, bruger man to cifre: tallet 3 skrives 10.

Totalssystemet er meget anvendt, specielt inden for computerverdenen. Det bygger på enere, toere, firere, ottere osv. I totalssystemet bruges kun de to cifre 0 og 1. Tal skrevet i totalssystemet kaldes *binære tal*. Tallene fra 1 til 16 skrevet binært ser således ud: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000.

Meget anvendt inden for computerverdenen er ligeledes sekstentalssystemet, *hexadecimale tal*. Her har vi enere, 16 enere = en sekstener, 16 sekstenere = en tohundredeseksoghalvtredser. For at skrive tal hexadecimalt har man brug for seksten forskellige cifre. Som ekstra cifre ud over de sædvanlige bruges A som 10, B som 11 osv. Tallene fra 1 til 16 skrevet i sekstentalssystemet ser dermed således ud: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, 10.

Lille Georgs julekalender 06

12. december

De fem søstre Anna, Bella, Clara, Dora og Eva holder jul hos onkel G og tante M.

- Det er sjovt, siger Dora pludselig, din alder, onkel, er lig med produktet af min alder og Claras, og din alder, tante, er lig med produktet af min alder og Evas!

- Du har ret, svarer onkel G, men om to år, når jeg er 57, vil min alder være produktet af Annas alder og Bellas alder.

- Ja, fortsætter Bella, som er den ældste af pigerne, og til den tid vil tantes alder være produktet af Claras alder og Evas.

Hvor gammel er tante M nu?

Svar: 33 år

Forklaring: Kald pigernes alder nu for a, b, c, d og e og tante M's alder nu for m. Onkel G's alder nu er 55, da han er 57 om to år. Vi får oplyst at $cd = 55$, $m = de$, $(a+2)(b+2) = 57$ og $m+2 = (c+2)(e+2)$ samt at b er det største af tallene a, b, c, d, e.

Af $(a+2)(b+2) = 57$ fås $a+2 = 3$ og $b+2 = 19$ (fordi Bella er ældst, men trods alt ikke $b+2 = 57$, for så ville $a+2 = 1$, og Anna ville så slet ikke være født endnu). Altså er $a = 1$ og $b = 17$. Af $cd = 55$ fås enten $c = 11$ og $d = 5$, eller $c = 5$ og $d = 11$ (ikke mulighed for c eller d lig med 55, da $b = 17$ er den højeste alder.) Dur $c = 11$ og $d = 5$? Nej, for så ville (tantes alder om to år) $5e + 2 = 13e + 2$), hvoraf e negativ. Altså $c = 5$ og $d = 11$, og (tantes alder om to år) $11e + 2 = 7e + 2) \Leftrightarrow 11e + 2 = 7e + 14 \Leftrightarrow 4e = 12 \Leftrightarrow e = 3$.

Tante M's alder nu er dermed $m = de = 33$.

Kommentar: Løsningen bygger på faktorisering af de indgående tal. Hvis man kender primfaktoropløsningen af et tal, har man overblik over på hvilke måder tallet kan spaltes op som et produkt. Skal tallet 57 skrives som et produkt af to faktorer, er der kun de to muligheder $57 = 1 \cdot 57$ og $57 = 3 \cdot 19$, fordi 57 består af de to primfaktorer 3 og 19. Hvis der er flere primfaktorer, bliver der flere muligheder. F.eks. er $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, og ved at kombinere primfaktorerne på forskellig måde får vi alle de tal der går op i 150: $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150$.

Lille Georgs julekalender 06

13. december

Hvilket af tallene hører ikke med i selskabet?
15, 77, 10, 55, 33, 21, 38, 30, 22, 35

Svar: 30

Forklaring: 30 er det eneste tal der består af tre primfaktorer: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Alle de øvrige tal har kun to primfaktorer: $15 = 3 \cdot 5$, $77 = 7 \cdot 11$ osv.

Lille Georgs julekalender 06

14. december

Marie er meget forkælet. Den første december får hun én kalendergave, den anden december får hun to, den tredie december får hun fire, den fjerde får hun otte, og således videre lige til juleaften.

Hvor mange kalendergaver får hun ialt?

Svar: 16777215

Forklaring: Det samlede antal gaver er

$$s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{22} + 2^{23} \quad .$$

Tallet s regnes lettest ud ved følgende trick: Vi starter simpelt hen med at gange s med 2. Det kan man gøre ved at gange med 2 i hvert led:

$$2s = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + ... + 2 \cdot 2^{22} + 2 \cdot 2^{23} \quad ,$$

hvilket jo også kan skrives

$$2s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{23} + 2^{24} \quad .$$

Så kan vi finde s ved at trække s fra $2s$:

$$s = 2s - s = (2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{23} + 2^{24}) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{23}) \quad .$$

Bemærk nu at de fleste af leddene i den første parentes går ud mod de tilsvarende led i den anden parentes. Tilbage er

$$s = 2^{24} - 1 \quad .$$

Kommentar: Mere generelt gælder om summen af en (endelig) *kvotientrække*

$$s = 1 + q + q^2 + ... + q^n \quad ,$$

hvor $q \neq 1$, at

$$s = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad .$$

[Det kan bevises efter samme idé som ovenfor: Gang først s med q. Træk så s fra qs. Det giver $qs - s = q^{n+1} - 1$. Sæt s uden for parentes: $(q-1)s = q^{n+1} - 1$. Dividér med $q - 1$ (tilladt for $q \neq 1$). Hermed er det ønskede bevist.]

Lille Georgs julekalender 06

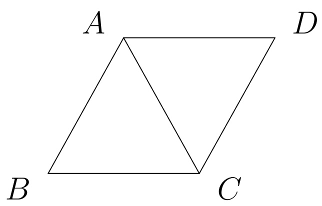
15. december

Er det muligt for fire punkter A, B, C og D i planen med $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 1$ at ligge sådan at også $|AC| = |BD| = 1$?

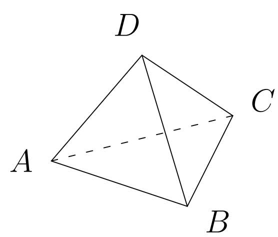
Er det muligt for fire punkter A, B, C og D i rummet med $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 1$ at ligge sådan at også $|AC| = |BD| = 1$?

Svar: Nej. Ja.

Forklaring: At fire punkter A, B, C og D i planen opfylder $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 1$, betyder at firkant $ABCD$ er en rhombe. Hvis yderligere $|AC| = 1$, er den ene diagonal i rhomben 1. Den anden diagonal vil så nødvendigvis være længere end 1. Det kan altså ikke lade sig gøre.



I rummet derimod kan det godt lade sig gøre. Vi kan anbringe de fire punkter som hjørner i et regulært tetraeder (en tresidet pyramide med en ligesidet trekant som grundflade og tre ligesidede trekanter som sideflader) med kantlængden 1.



Lille Georgs julekalender 06

16. december

Hos familien Petersen er det børnene der vasker op. Hvert barn vasker årligt 1200 tallerkner. Hvis forældrene også var med, behøvede hver kun at vaske 1000 tallerkner om året.

Hvor mange børn er der i familien?

Svar: 10

Forklaring: Vi løser opgaven ved opstille en ligning. Kald antallet af børn for x. Det samlede antal tallerkner kan nu udtrykkes på to måder. For det første er det lig med $x \cdot 1200$ (nemlig x personer à 1200 tallerkner). For det andet er det lig med $(x+2) \cdot 1000$ (nemlig $x+2$ personer à 1000 tallerkner). Disse to udtryk er derfor lig med hinanden:

$$1200 \cdot x = 1000 \cdot (x+2) \quad .$$

Ligningen løses:

$$1200x = 1000(x+2) \Leftrightarrow 1200x = 1000x + 2000 \Leftrightarrow 200x = 2000 \Leftrightarrow x = 10 \quad .$$

Altså er der 10 børn i familien.

Lille Georgs julekalender 06

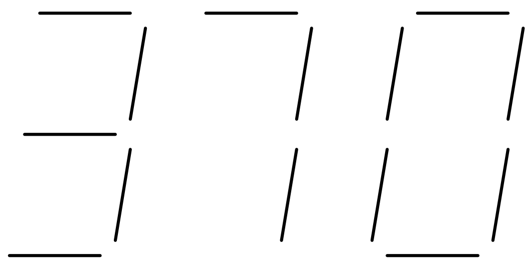
17. december

- Hvad hedder du? spørger Anna.
- Det kan du regne ud, svarer Ole. Her, lån min gamle lommeregner og udregn dette tal (han skriver et regnestykke på et stykke papir).
- Det har jeg gjort nu, siger Anna, men det hjælper mig ikke.
- Jeg kan godt se det, siger Berta som sidder over for Anna.

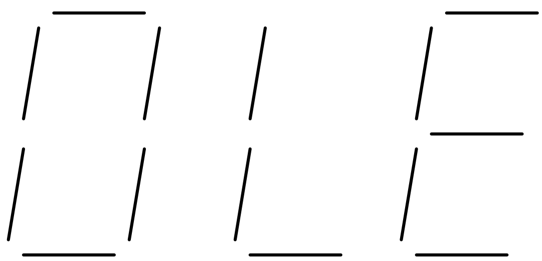
Hvad var resultatet af regnestykket?

Svar: 370

Forklaring: Lommeregneren viser



Set på hovedet står der nemlig



Lille Georgs julekalender 06

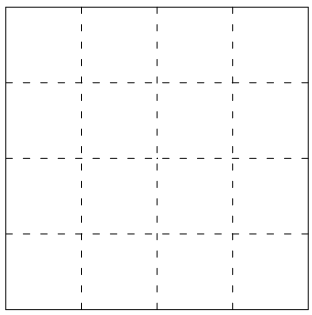
18. december

En lyskæde består af en lang, bøjelig ledning, hvorpå der er monteret ialt 17 små elektriske pærer med 2 meters mellemrum mellem hver.

Kan denne lyskæde anbringes i loftet på et rum på 4 m $\times$ 4 m således at ingen pærer kommer tættere på hinanden end 1,5 meter?

Svar: Nej

Forklaring: Uanset hvor snedigt man snor og drejer kæden, vil mindst et af de 16 kvadrater på 1 m $\times$ 1 m indeholde mindst to pærer (da der 17 pærer ialt). Og afstanden mellem to pærer i samme kvadrat kan ikke overstige diagonalen i kvadratet, som er (Pythagoras) $\sqrt{2} \approx 1,41 < 1,5$ m. Altså er der mindst to pærer med en indbyrdes afstand på under 1,5 m.



Kommentar: Vi har anvendt *skuffeprincippet*, som i al sin enkelhed siger at hvis man anbringer ting i skuffer, og der er flere ting end skuffer, så må mindst en af skufferne indeholde mindst to ting.

Lille Georgs julekalender 06

19. december

I julen er alle fætrene samlet. Traditionen tro går de juledag en lang tur i skoven. Selv om ingen af dem har stemmeret, snakker de alle ivrigt om politik. Den næstyngste er en nørd. Han siger pludselig til de andre:

- Hvis man tager alle os og ganger vores aldre sammen, så får man 11781.

Hvor mange fætre er der ialt?

Svar: 4

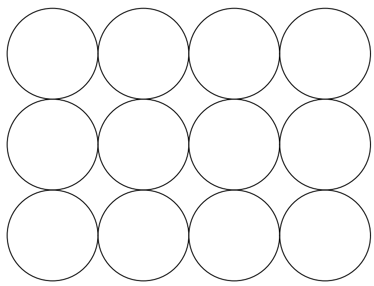
Forklaring: Fætrenes aldre fremkommer ved at kombinere primfaktorerne fra primfaktoropløsningen $11781 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$. I princippet kunne der være en eller flere fætre på 1 år, men det kan afvises pga. oplysningen om at alle fætrene går og taler. Kunne man tænke sig to fætre på 3 år? Nej, for så ville det ikke give mening at tale om "den næstyngste". Hvad så med en enkelt fætter på 3 år? Det går heller ikke, for så skulle det andet 3-tal fra primfaktoropløsningen kombineres med et af de øvrige primtal, og resultatet ville mindst blive 21 år - i strid med at ingen af fætrene har stemmeret. Altså må de to 3-taller kombineres med hinanden til alderen 9. Ingen af de øvrige primfaktorer kan kombineres, da resultatet ville blive for stort (stemmeret). Fætrenes aldre er dermed 7, 9, 11 og 17, og der er ialt 4 fætre.

Lille Georgs julekalender 06

20. december

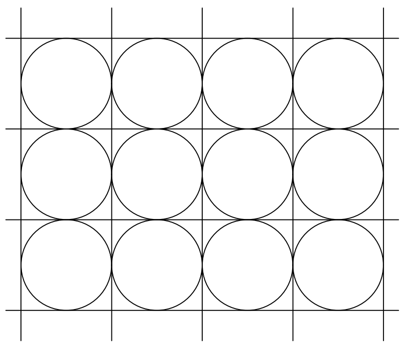
Et uendelig stort stykke brunkagedej rulles ud, og der udstikkes cirkulære brunkager som vist på figuren. Den resterende dej samles til en klump og udrulles igen. Igen udstikkes brunkager som vist. Teoretisk set kan denne proces fortsætte så længe det skal være.

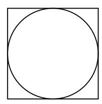
Hvor mange gange skal dejen rulles ud for at 99 % af den oprindelige dej er udnyttet?



Svar: 3 gange

Forklaring:





I hvert kvadrat udnyttes brøkdelen $\frac{\pi}{4}$ af dejen. (Arealet af cirklen πr^2 udgør nemlig denne brøkdel af arealet $(2r)^2 = 4r^2$ af det omskrevne kvadrat). Til rest bliver altså brøkdelen $1-\frac{\pi}{4} \approx 0,21461$. Efter næste udrulning resterer der brøkdelen $1-\frac{\pi}{4}$ af resten $1-\frac{\pi}{4}$, dvs. brøkdelen $(1-\frac{\pi}{4})^2 \approx 0,04605$ af den oprindelige dej. Næste gang er vi nede på en rest på $(1-\frac{\pi}{4})^3 \approx 0,00988 < 0,01$, dvs. over 99 % er udnyttet, og 3 gange er dermed nok.

Lille Georgs julekalender 06

21. december

To personer skiftes til at sige et af tallene 1, 2, ..., 100 efter følgende regler: Den første spiller skal sige et af tallene fra 1 til 10. Hver gang den ene har sagt et tal, skal den anden sige et tal der er mindst 1 og højst 10 større end det tal der lige er sagt. Den der siger 100, har vundet.

Hvis man gerne vil vinde, er det så en fordel at få lov til at begynde?

Svar: Ja

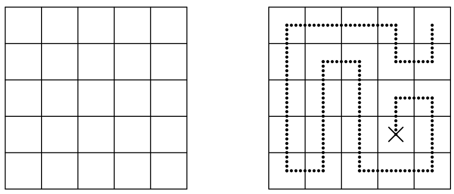
Forklaring: Hvis man får mulighed for at sige et af tallene fra talrækken 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100 (lette at huske som tallene i 11-tabellen plus 1), kan man vinde ved at holde sig til disse tal uanset hvad modspilleren siger. (Bemærk at modspilleren ikke har mulighed for at bryde ind i rækken: har man f.eks. sagt 78, kan modspilleren højst sige 88.) Den spiller der begynder, kan dermed vinde spillet hvis han starter med at sige 1.

Lille Georgs julekalender 06

22. december

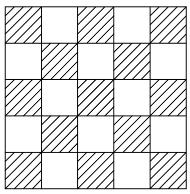
På et af felterne på den viste 5×5-spilleplade anbringes en brik der kan bevæge sig rundt på pladen efter reglerne for skakbrikken tårn, dvs. vandret eller lodret så mange felter ad gangen som man ønsker. Det gælder nu om at føre brikken rundt på pladen således at alle felter bliver besøgt netop én gang.

Tegningen til højre viser et eksempel på at det kan lykkes når brikken starter i feltet markeret med et kryds. Er det muligt at løse opgaven uanset hvilket felt brikken starter i?



Svar: Nej

Forklaring: Lad os farve spillepladen skakternet som vist.



Hvis brikken starter på et hvidt felt, kan det ikke lade sig gøre at komme hele brættet igennem efter reglerne. Bemærk først at hver gang brikken går fra et felt til et nabofelt vandret eller lodret, vil den gå til et felt med modsat farve. En eventuel brugbar rute startende på et hvidt felt vil altså have et forløb af typen hvidt felt - sort felt - hvidt felt - sort felt - hvidt felt - osv, sluttende med hvid fordi der er et ulige antal felter ialt. Hvis der fandtes en sådan rute, ville der altså være flere hvide end sorte felter. Men sådan er det ikke: brættet består af 12 hvide og 13 sorte felter. Altså findes der ikke en brugbar rute startende på et hvidt felt.

Kommentar: Man kunne stille spørgsmålet i opgaven for en mere generel spilleplade med $n \times n$ felter. Svaret er nej for alle ulige tal $n > 1$ med en begrundelse som ovenfor.

Lille Georgs julekalender 06

23. december

Hvilket tal er det næste i rækken?

1,1,1,1,2,1,1,3,3,1,1,4,6,4,1,1,5,10,

Svar: 10

Forklaring: Vi genkender tallene fra *Pascals trekant*:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Kommentar: Pascals trekant udgøres af binomialkoefficienterne $\binom{n}{r}$. For disse gælder formlen:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1} \quad .$$

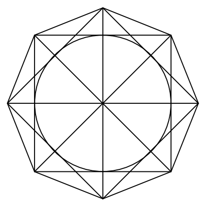
Denne egenskab betyder at hvert tal på en given plads inde i en række fremkommer som sum af to nabotal i rækken ovenover.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

Lille Georgs julekalender 06

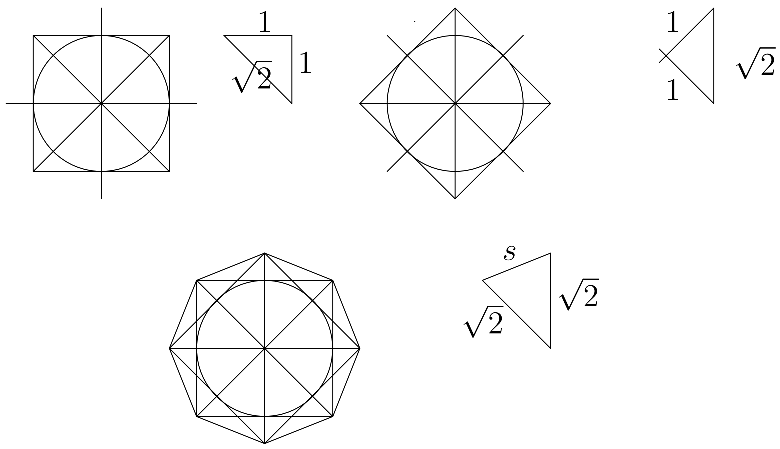
24. december

Dette smukke juleophæng er kantet med guldtråd. Cirklen i midten har radius 1,0 cm. Hvor meget guldtråd er der ialt brugt til kanten?



Svar: 8,7 cm

Forklaring:



Med cosinusrelationen fås

$$s^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(45°) = 2 + 2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2} \quad .$$

Så er

$$s = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \quad ,$$

og den samlede kantlængde er dermed

$$8\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \approx 8,7 \quad .$$