Mandag den 18. juli 2011

Opgave 1. For enhver mængde $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ af fire forskellige positive hele tal betegner vi summen $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ med s_A. Lad n_A betegne antallet af de par (i, j) med $1 \leq i < j \leq 4$ hvor $a_i + a_j$ går op i s_A.

Find alle de mængder A af fire forskellige positive hele tal som opnår den størst mulige værdi af n_A.

Opgave 2. Lad $\mathcal{S}$ være en endelig mængde af mindst to punkter i planet. Antag at ikke tre punkter i $\mathcal{S}$ ligger på en ret linje. En *vindmølle* er en proces som begynder med en linje ℓ som går gennem et enkelt punkt $P \in \mathcal{S}$. Linjen drejer med uret om *omdrejningspunktet* P indtil første gang den møder et andet punkt i $\mathcal{S}$. Dette punkt, Q, bliver så det nye omdrejningspunkt, og linjen drejer nu med uret om Q, indtil det næste gang møder et punkt i $\mathcal{S}$. Denne proces fortsætter i det uendelige.

Vis at vi kan vælge et punkt P i $\mathcal{S}$ og en linje ℓ gennem P sådan at den resulterende vindmølle benytter ethvert punkt i $\mathcal{S}$ som omdrejningspunkt uendelig mange gange.

Opgave 3. Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en reel funktion defineret på mængden af reelle tal som opfylder

$$f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

for alle reelle tal x og y.

Vis at $f(x) = 0$ for alle $x \leq 0$.

Varighed: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave kan give op til 7 point.

Tirsdag den 19. juli 2011

Opgave 4. Lad $n > 0$ være et helt tal. Vi har fået en skålvægt og n lodder med vægtene 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Vi skal lægge alle n lodder på vægten ét efter ét på en sådan måde at den højre vægtskål aldrig er tungere end den venstre. I hvert skridt vælger vi ét af de lodder som endnu ikke er blevet lagt på vægten, og lægger det på enten den venstre eller den højre vægtskål. Sådan fortsætter vi indtil alle lodderne er lagt på vægten.

Bestem antallet af måder dette kan gøres.

Opgave 5. Lad f være en funktion fra mængden af hele tal til mængden af positive hele tal. Antag at differensen $f(m) - f(n)$ er delelig med $f(m-n)$ for ethvert par af hele tal m og n.

Vis at tallet $f(n)$ er deleligt med $f(m)$ for alle hele tal m og n med $f(m) \leq f(n)$.

Opgave 6. Lad ABC være en spidsvinklet trekant med omskrevet cirkel Γ. Lad ℓ være en tangent til Γ, og lad ℓ_a, ℓ_b og ℓ_c være de linjer som fås ved at spejle ℓ i linjerne henholdsvis BC, CA og AB.

Vis at den omskrevne cirkel for den trekant hvis sider ligger på linjerne ℓ_a, ℓ_b og ℓ_c, tangerer Γ.

Varighed: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave kan give op til 7 point.