

Onsdag den 7. juli 2010

Opgave 1. Bestem alle funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sådan at

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

gælder for alle $x, y \in \mathbb{R}$. (Her betegner $\lfloor z \rfloor$ det største hele tal mindre end eller lig z .)

Opgave 2. Lad I være centrum for den indskrevne cirkel i trekant ABC og lad Γ være trekantens omskrevne cirkel. Lad linjen AI skære Γ i et punkt $D \neq A$. Lad E være et punkt på buen \widehat{BDC} og F et punkt på siden BC sådan at

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2} \angle BAC.$$

Lad G være midtpunktet af linjestykket IF . Vis at linjerne DG og EI skærer hinanden på Γ .

Opgave 3. Lad \mathbb{N} være mængden af positive hele tal. Bestem alle funktioner $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sådan at

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

er et kvadrattal for alle $m, n \in \mathbb{N}$.