

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Torsdag den 17. juli 2008

Oppgave 4. Find alle funktioner $f :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ (dvs. at f er en funktion fra de positive reelle tal til de positive reelle tal) således at

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

for alle reelle $w, x, y, z > 0$ som opfylder $wx = yz$.

Oppgave 5. Lad n og k være positive heltal således at $k \geq n$ og $k - n$ er lige. Lad der være givet $2n$ lamper (nummereret $1, 2, \dots, 2n$), som hver kan være tændt eller slukket. Til at begynde med er alle lamper slukket. Vi betragter nu følger af *træk*: i hvert træk enten tænder vi én lampe der var slukket eller vi slukker én der var tændt.

Lad N være antallet af sådanne følger bestående af k træk og som resulterer i at lamperne 1 til n alle er tændt, mens alle lamperne $n + 1$ til $2n$ er slukket.

Lad M være antallet af sådanne følger bestående af k træk og som resulterer i at lamperne 1 til n alle er tændt, mens lamperne $n + 1$ til $2n$ alle er slukket, men hvor ingen af lamperne $n + 1$ til $2n$ har været tændt undervejs.

Bestem forholdet N/M .

Oppgave 6. Lad $ABCD$ være en konveks firkant med $|AB| \neq |BC|$. Lad ω_1 og ω_2 betegne henholdsvis ABC 's og ADC 's indskrevne cirkel. Antag at der findes en cirkel ω som tangerer halvlinjen BA på forlængelsen udover A og halvlinjen BC udover C , og som samtidig tangerer linjerne AD og CD . Vis at de fælles ydre tangenter til ω_1 og ω_2 skærer hinanden i et punkt på ω .