

46. Internationale Matematikolympiade

Første dag

Mérida, Mexico

Onsdag den 13. juli 2005

Language: Danish

Opgave 1. Seks punkter vælges på siderne i en ligesidet trekant ABC på følgende måde: Så A_1, A_2 ligger på BC ; B_1, B_2 på CA ; C_1, C_2 på AB . Disse seks punkter er vinkelspidserne i en konveks sekskant $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ med lige lange sider.

Vis at de tre linjer A_1B_2 , B_1C_2 og C_1A_2 skærer hinanden i ét og samme punkt.

Opgave 2. Lad a_1, a_2, \dots være en følge af heltal med uendeligt mange negative og uendeligt mange positive led. Antag at der for ethvert naturligt tal n fås n forskellige rester når tallene a_1, a_2, \dots, a_n divideres med n .

Vis at ethvert helt tal optræder netop én gang i denne talfølge.

Opgave 3. Lad x, y og z være positive, reelle tal som opfylder $xyz \geq 1$.

Vis at

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

Tilladt tid: 4 timer og 30 minutter.

Hver opgave vurderes til maksimalt 7 point.