

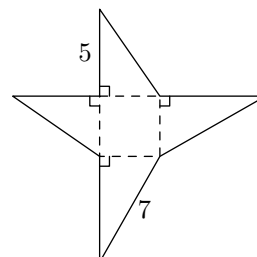
Georg Mohr-Konkurrencen 2005

Tirsdag den 11. januar 2005 kl. 9–13

Tilladte hjælpemidler: kun skrive- og tegneredskaber

Opgave 1. Figuren stammer fra et udklipsark. Når sidefladerne foldes op langs de stiplede linjer, fremkommer en (ikke ligesidet) pyramide med kvadratisk grundflade.

Beregn grundfladens areal.



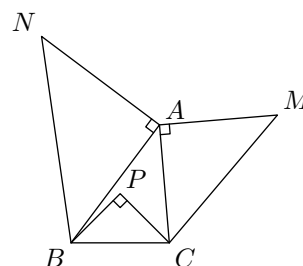
Opgave 2. Bestem for ethvert positivt reelt tal a antallet af løsninger (x, y) til ligningssystemet

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= 1, \\ x^2 + y^2 &= a, \end{aligned}$$

hvor x og y er reelle tal.

Opgave 3. Punktet P ligger inden i $\triangle ABC$ så $\triangle BPC$ er ligebenet, og vinkel P er ret. Desuden er $\triangle BAN$ og $\triangle CAM$ begge ligebenede og med en ret vinkel i A , og begge ligger uden for $\triangle ABC$.

Vis at $\triangle MNP$ er ligebenet og retvinklet.



Opgave 4. Fjorten elever skriver hver et helt tal på tavlen. Da de sidenhen møder deres matematiklærer Homer Grog, fortæller de ham at uanset hvilket tal de slettede på tavlen, så kunne de resterende tal deles i tre grupper med samme sum. De fortæller ham også at tallene på tavlen var hele tal.

Er det nu muligt for Homer Grog at afgøre hvilke tal eleverne skrev på tavlen?

Opgave 5. For hvilke reelle tal p har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1^4 + \frac{1}{x_1^2} &= px_2, \\ x_2^4 + \frac{1}{x_2^2} &= px_3, \\ &\vdots \\ x_{2004}^4 + \frac{1}{x_{2004}^2} &= px_{2005}, \\ x_{2005}^4 + \frac{1}{x_{2005}^2} &= px_1 \end{aligned}$$

netop én løsning $(x_1, x_2, \dots, x_{2005})$, hvor $x_1, x_2, \dots, x_{2005}$ er reelle tal?