

Georg Mohr-Konkurrencen 2022

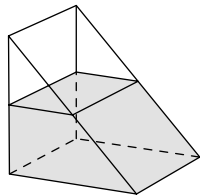
Anden runde

Tirsdag den 11. januar 2022 kl. 9-13

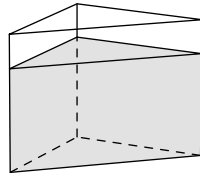
Tilladte hjælpemidler: kun skrive- og tegneredskaber.

Husk at argumentation er væsentlig ved bedømmelsen, og at delvise besvarelser også kan give point.

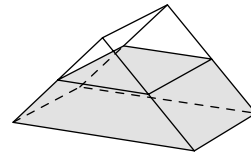
Opgave 1. Figuren viser et glasprisme der er delvis fyldt med væske. Prismets overflade udgøres af to retvinklede, ligebenede trekkanter, to kvadrater med sidelængde 10 cm og et rektangel. Prismet kan ligge på tre forskellige måder. Hvis prismet ligger som vist på figur 1, er væskehøjden 5 cm.



figur 1



figur 2



figur 3

a) Hvad er væskehøjden i prismet når det ligger som vist på figur 2?

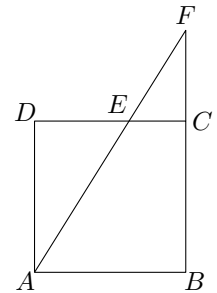
b) Hvad er væskehøjden i prismet når det ligger som vist på figur 3?

Opgave 2. Et positivt helt tal er et *palindrom* hvis det skrives ens forfra og bagfra. For eksempel er 285582 et palindrom. Et sekscifret tal $ABCDEF$, hvor A, B, C, D, E, F er cifre, kaldes *hyggeligt* hvis AB går op i CD , og CD går op i EF . For eksempel er 164896 hyggeligt.

Bestem alle hyggelige palindromer.

Opgave 3. Kvadratet $ABCD$ har sidelængde 1. Punktet E ligger på siden CD . Linjen gennem A og E skærer linjen gennem B og C i punktet F .

Bevis at $\frac{1}{|AE|^2} + \frac{1}{|AF|^2} = 1$.



Opgave 4. Georg leger følgende leg. Han vælger to positive hele tal n og k . På et $n \times n$ -bræt hvor alle felter er hvide, maler Georg k af felterne sorte. Så tæller han hvor mange sorte felter der er i hver række, tager kvadratet af hvert af disse n tal og lægger kvadraterne sammen. Resultatet kalder han S . På samme måde tæller han antallet af hvide felter i hver række, tager kvadratet af hvert af disse n tal og lægger kvadraterne sammen. Resultatet kalder han H . Georg vil gerne opnå at $S - H = 49$.

Bestem samtlige værdier af n og k for hvilke dette kan lade sig gøre.

Eksempel: Hvis Georg vælger $n = 5$ og $k = 14$, kan han for eksempel male brættet som vist. Da er

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 9 + 25 = 48,$$

$$H = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 = 16 + 9 + 4 + 4 + 0 = 33,$$

så her er $S - H = 48 - 33 = 15$.

	Antal sorte	Antal hvide																									
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>																										1	4
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>																										2	3
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>																										3	2
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>																										3	2
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px; background-color: gray;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>																										5	0

Opgave 5. Lad $n > 2$ være et helt tal. Tallene $1, 2, \dots, n$ er skrevet på hjørnerne af en n -kant i denne rækkefølge. Et træk består i at vælge to nabohjørner og lægge 1 til hvert af deres tal.

Bestem alle n for hvilke man kan opnå at alle tallene er ens efter et endeligt antal træk.

Sponsorer: Undervisningsministeriet, Novo Nordisk Fonden, Jobindex, Lundbeckfonden, Georg Mohr Fonden og Matematiklærerforeningen.