Løsninger til Georg Mohr-Konkurrencen 2017
2. runde

Opgave 1 Tegnet i den øverste ligning kan ikke være $+$. Tallene x^2 og z^2 kan nemlig ikke være negative, og det kan deres sum dermed heller ikke være. Den øverste ligning kan derfor ikke lyde $x^2 + z^2 = -8$, men må være $x^2 - z^2 = -8$.

Tegnet i den nederste ligning kan heller ikke være $+$. Så ville man nemlig ved addition af de to ligninger få $(x^2 - z^2) + (y^2 + z^2) = -8 + 7$, hvoraf $x^2 + y^2 = -1$, altså igen en negativ sum af to kvadrater.

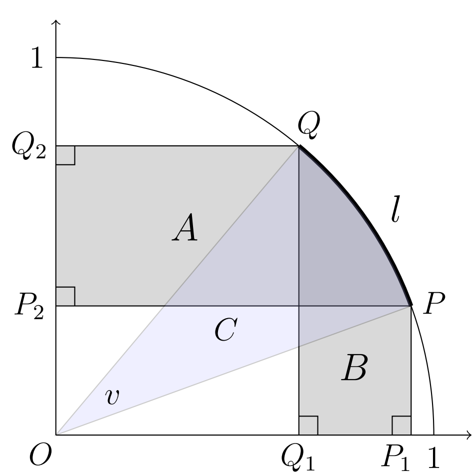
Begge de to tegn er derfor $-$.

Opgave 2 Først viser vi at det er muligt for Georg at strege alle tal ud som har rest 2 når man dividerer med 3, dvs. tallene $2, 5, 8, \ldots, 50$. Hvis man ganger tallet 2 med 10 to gange, får man 200. Tallet 200 har rest 2 når det divideres med 3. Når man derefter trækker 3 fra igen og igen, får man følgende tal: $197, 194, 191, \ldots, 5, 2$, heriblandt altså alle tallene fra 1 til 50 som har rest 2 når de divideres med 3. Dem kan Georg derfor strege ud.

Nu viser vi at Georg ikke kan strege andre tal ud. Det gør vi ved at vise at hvis et tal har rest 2 ved division med 3, og det ganges med 10, da har resultatet også rest 2. Og hvis et tal har rest 2, og man trækker 3 fra, så har resultatet også rest 2. Dette viser nemlig at Georg med disse to regneoperationer kun kan få tal der har rest 2.

Et tal har rest 2 ved division med 3 netop hvis det kan skrives som $3n + 2$. Hvis vi ganger det med 10, fås $30n + 20 = 3(10n + 6) + 2$, altså igen et tal med rest 2 ved division med 3. Hvis vi trækker 3 fra, er det oplagt at resten ved division med 3 ikke ændres. Altså kan Georg ikke strege andre tal ud end de nævnte.

Opgave 3 Kald vinklen der spænder over buestykket l, for v. Omkredsen af en cirkel med radius 1 er 2π. Dermed er længden af buestykket $\frac{v}{360^\circ} \cdot 2\pi$. Kald cirkeludsnittet der spænder over buestykket l, for C. Arealet af en cirkel med radius 1 er π. Altså er arealet af C givet ved $\frac{v}{360^\circ} \cdot \pi$, dvs. det halve af buelængden l. At vise at arealet af A plus arealet af B er lig med længden af l, svarer altså til at vise at $\text{areal}(A) + \text{areal}(B) = 2 \cdot \text{areal}(C)$.



Det vises på følgende måde:

$$\begin{aligned}\text{areal}(A) &= \text{areal}(C) + \text{areal}(OQQ_2) - \text{areal}(OPP_2)\\ &= \text{areal}(C) + \text{areal}(OQQ_1) - \text{areal}(OPP_1).\end{aligned}$$

$$\text{areal}(B) = \text{areal}(C) + \text{areal}(OPP_1) - \text{areal}(OQQ_1).$$

Ved at lægge de to udtryk sammen fås at $\text{areal}(A) + \text{areal}(B) = 2 \cdot \text{areal}(C)$.

Opgave 4 Først viser vi at x ikke kan være mindre end 2. Da $A \geq 2$, er $x \geq \sqrt{A} \geq \sqrt{2}$, og dermed $x \geq 2$ da x er et helt tal.

Vi viser herefter at x ikke kan være større end 3. Antag at $x \geq 4$. Så er $\sqrt{9+x} < x$. Da cifrene A, B, C, D højst er 9, får vi ved at udnytte $\sqrt{9+x} < x$ fire gange at

$$\begin{aligned} x = \sqrt{A + \sqrt{B + \sqrt{C + \sqrt{D + x}}}} &\leq \sqrt{A + \sqrt{B + \sqrt{C + \sqrt{9 + x}}}}\\ &< \sqrt{A + \sqrt{B + \sqrt{C + x}}} \leq \sqrt{A + \sqrt{B + \sqrt{9 + x}}}\\ &< \sqrt{A + \sqrt{B + x}} \leq \sqrt{A + \sqrt{9 + x}}\\ &< \sqrt{A + x} \leq \sqrt{9 + x}\\ &< x. \end{aligned}$$

Nu er $x < x$, hvilket ikke kan lade sig gøre. Altså er $x \leq 3$. De eneste mulige x er derfor 2 eller 3.

Da $x = \sqrt{A + \sqrt{B + \sqrt{C + \sqrt{D + x}}}}$ er et helt tal, må $A + \sqrt{B + \sqrt{C + \sqrt{D + x}}}$ være et kvadrattal. Da således $\sqrt{B + \sqrt{C + \sqrt{D + x}}}$ er et helt tal, må $B + \sqrt{C + \sqrt{D + x}}$ være et kvadrattal. På helt tilsvarende måde fås først at $C + \sqrt{D + x}$ er et kvadrattal, og endelig at $D + x$ er et kvadrattal.

Da $D + x$ er et kvadrattal og $x = 2$ eller $x = 3$, må $D + x = 4$ eller $D + x = 9$, og altså $\sqrt{D + x} = 2$ eller $\sqrt{D + x} = 3$. Det medfører at kvadrattallet $C + \sqrt{D + x}$ er lig med $C + 2$ eller $C + 3$, og altså igen $\sqrt{C + \sqrt{D + x}} = 2$ eller $\sqrt{C + \sqrt{D + x}} = 3$. På helt samme måde fås $\sqrt{B + \sqrt{C + \sqrt{D + x}}} = 2$ eller $\sqrt{B + \sqrt{C + \sqrt{D + x}}} = 3$. Alle kvadratrødderne er altså lig med 2 eller 3.

Da det gælder om at finde det mindst mulige tal $ABCD$ større end 2017, undersøger vi om der kan findes en løsning med $A = 2$. I dette tilfælde er $2 + \sqrt{B + \sqrt{C + \sqrt{D + x}}}$ et kvadrattal. Så kan $\sqrt{B + \sqrt{C + \sqrt{D + x}}} = 3$ udelukkes, og vi får $\sqrt{B + \sqrt{C + \sqrt{D + x}}} = 2$ og $x = 2$. Nu er $4 = B + \sqrt{C + \sqrt{D + 2}}$. Da kvadratroden er 2 eller 3, er den mindst mulige værdi af B lig med 1. Hvis $B = 1$, er $\sqrt{C + \sqrt{D + 2}} = 3$. Nu er $9 = C + \sqrt{D + 2}$. Da kvadratroden er 2 eller 3, er den mindst mulige værdi af C lig med 6. Hvis $C = 6$, er $\sqrt{D + 2} = 3$. Nu er $9 = D + 2$ og altså $D = 7$.

Vi har alt i alt fundet at tallet $n = ABCD = 2167$ opfylder ligningen for et passende helt tal x, og analysen viser at dette er den mindst mulige værdi af n.

Opgave 5 Lad os kalde en kamp for afgjort hvis den ikke er uafgjort. Bemærk først at i en gruppe af tre spillere kan ikke alle kampe være endt uafgjort, og de kan heller ikke alle være endt afgjort. I ingen af tilfældene ville der nemlig optræde en spiller med $1\frac{1}{2}$ point.

Af bemærkningen følger at hvis en spiller har spillet uafgjort mod to andre, må disse to have spillet afgjort mod hinanden. En spiller kan derfor højst have spillet uafgjort i to kampe i alt, for hvis en spiller P havde spillet uafgjort mod både A, B og C, ville hver af kampene A-B, A-C eller B-C være afgjorte. I kampene i gruppen A, B, C ville der derfor kun være afgjorte kampe, hvilket ikke kan lade sig gøre.

På helt tilsvarende måde indses at hver spiller højst kan have spillet afgjort i to kampe i alt. Hvis en spiller har spillet afgjort mod to andre, må disse to have spillet uafgjort mod hinanden, dvs. hvis en spiller P havde spillet afgjort mod både A, B og C, ville hver af kampene A-B, A-C eller B-C være uafgjorte. I kampene i gruppen A, B, C ville der derfor kun være uafgjorte kampe, hvilket ikke kan lade sig gøre.

Vi har nu set at hver spiller højst kan have spillet fire kampe i alt, og da alle spiller mod alle, er der højst fem spillere i alt.

En turnering med fem spillere *er* faktisk mulig: For fem spillere A, B, C, D og E er betingelserne opfyldt hvis A vinder over B, B vinder over C, C over D, D over E og E over A, og alle andre kampe er uafgjorte.