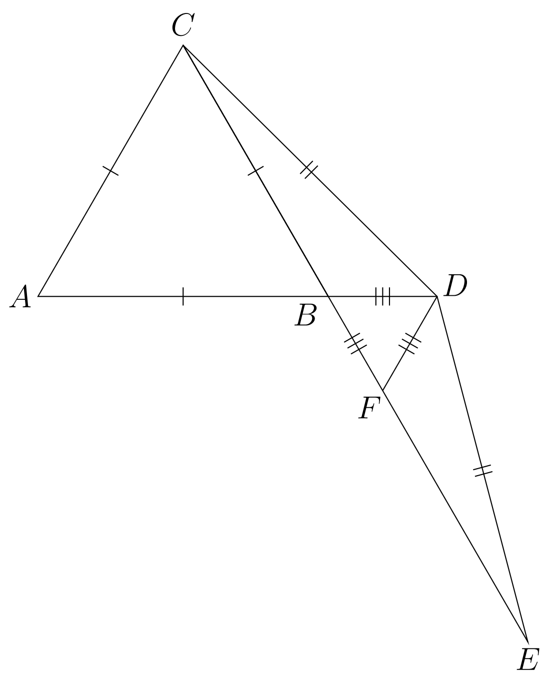
Løsninger til Georg Mohr-Konkurrencen 2015
2. runde

Opgave 1 Af ulighederne $a+b<b+c$ og $c+d<d+e$ følger henholdsvis $a<c$ og $c<e$, dvs. $a<c<e$. Af ulighederne $e+a<d+e$, $c+d<b+c$ og $a+b<e+a$ følger henholdsvis $a<d$, $d<b$ og $b<e$, dvs. $a<d<b<e$. Af $a<c<e$ sammenholdt med $a<d<b<e$ fremgår at a er det mindste af de fem tal og e det største.

Opgave 2 Når a og $b=625-a$ danner par, er betingelsen at a går op i b ensbetydende med at a går op i 625. Hvis nemlig a går op i b, vil a også gå op i summen $a+b=625$; og hvis a går op i 625, vil a også gå op i differensen $625-a=b$. Da $625=5^4$, og 5 er et primtal, er tallene 1, 5, $5^2=25$, $5^3=125$ og $5^4=625$ de eneste tal der går op i 625. Altså må a være et af tallene 1, 5, 25 eller 125. Der er altså fire par af den ønskede slags.

Opgave 3 Gennem D tegnes en linje parallel med AC. Denne linje skærer BE i punktet F. Da $\angle FBD=\angle CBA=60°$ og $\angle BDF=\angle BAC=60°$, er $\triangle BDF$ ligesidet. Altså er $|FB|=|BD|$.



Da $|DC|=|DE|$, er $\triangle DEC$ ligebenet. Heraf følger at $\angle DCF=\angle DEB$. Trekanterne $\triangle DCF$ og $\triangle DEB$ har derfor to parvis lige store vinkler og endvidere en fælles sidelængde, og dermed er de kongruente. Altså er

$$|BE|=|CF|=|CB|+|BF|=|AB|+|BD|=|AD|.$$

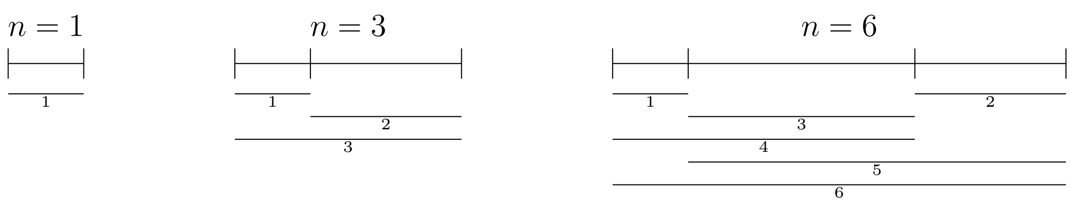
Opgave 4 Gang ligningerne igennem med henholdsvis z, x og $-y$. Da er

$$\begin{aligned} zx^2 + yz^2 &= z, \\ xy^2 - x^2z &= 0, \\ -yz^2 - xy^2 &= -y. \end{aligned}$$

Ved at lægge de tre ligninger sammen fås $0 = z - y$ og altså $y = z$. Da de oprindelige ligninger er symmetriske i x og z, fås helt tilsvarende $y = x$. Vi ved nu at $x = y = z$ hvis x, y og z skal løse ligningssystemet. Altså viser $x^2 + yz = 1$ at $2x^2 = 1$, og dermed at $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. De to eneste muligheder er derfor $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ og $x = y = z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, og ved indsættelse ses at disse begge er løsninger.

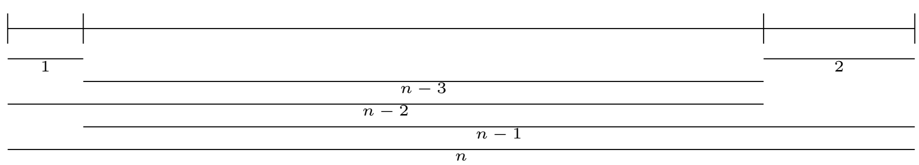
Opgave 5 Når man sætter m mærker, danner hvert par af mærker en afstand, dvs. der er i alt $n = \frac{m(m-1)}{2}$ afstande. Altså må n være blandt tallene $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$.

For $n = 1$, $n = 3$ og $n = 6$ er det muligt at sætte mærker så det ønskede er opfyldt :

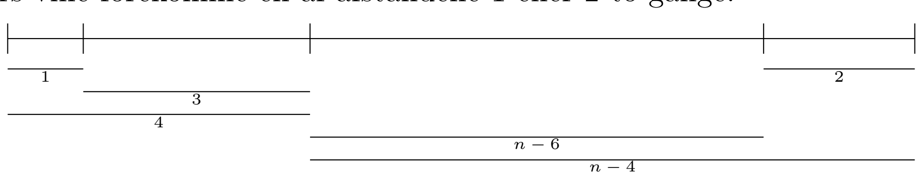


Nu viser vi at det ikke er muligt for $n = 10, 15, 21, \ldots$. Antag at $n \geq 10$.

Afstanden n må nødvendigvis forekomme mellem de to yderste mærker. De resterende mærker skal have en heltallig afstand til disse mærker. Afstanden $n - 1$ må derfor forekomme mellem et af de yderste mærker og endnu et mærke. Afstanden $n - 2$ må også forekomme mellem et af de yderste mærker og endnu et mærke da der ellers ville komme to afstande på 1, og det skal ikke være det samme yderste mærke som $n - 1$ da der ellers også ville komme to afstande på 1.



Nu har vi afstandene 1, 2, $n - 3$, $n - 2$, $n - 1$ og n. Hvis vi skal opnå afstanden $n - 4$, skal vi sætte mindst ét mærke der højst har afstand 4 til et af de to yderste mærker. Dette er kun muligt ved at sætte et mærke med afstand 4 til yderste venstre mærke på figuren, da der ellers ville forekomme en af afstandene 1 eller 2 to gange.



Nu har vi afstandene 1, 2, 3, 4, $n - 6$, $n - 4$, $n - 3$, $n - 2$, $n - 1$ og n. Hvis vi skal opnå afstanden $n - 5$, skal vi sætte mindst ét mærke der højst har afstand 5 til et af de to yderste mærker, men dette er umuligt uden at opnå en af afstandene 1, 2 eller 3 to gange. Det ønskede kan derfor ikke lade sig gøre når $n \geq 10$.