Løsninger til Georg Mohr-Konkurrencen 2014
2. runde

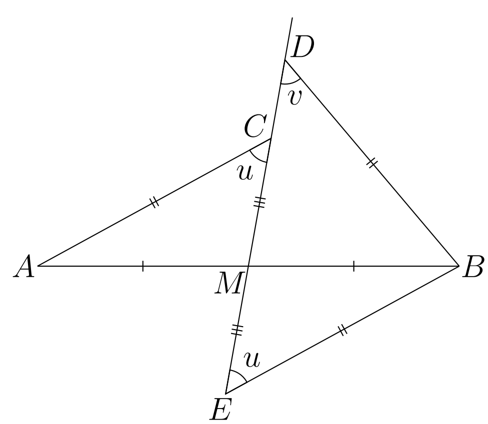
Opgave 1 Kald cifrene på Georgs tre kort for A, B og C så $A > B > C$. Det største tal der kan dannes, skrives da ABC, og det næststørste skrives ACB da disse to kombinationer har flest mulige hundreder. Vi har altså

$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ +\ A\,C\,B \\ \hline 1\,7\,3\,2 \\ \hline\hline \end{array}$$

Da summen ender på 2, må $B + C = 2$ eller $B + C = 12$. Fordi B og C er to forskellige positive cifre, kan $B + C = 2$ udelukkes, og den eneste mulighed er altså $B + C = 12$. Når man lægger enercifrene sammen, får man altså 1 i mente. Når man lægger tiercifrene sammen og husker menten, får man $1 + B + C = 13$. Der er altså igen 1 i mente. Når man lægger hundredecifrene sammen, fås derfor $1+A+A = 17$, altså $2A = 16$ og dermed $A = 8$. Da $B + C = 12$, og B er større end C, må B være større end 6. Samtidig er B mindre end $A = 8$. Altså må $B = 7$, og af $B + C = 12$ fås så $C = 5$. Georgs mor kan derfor godt regne ud hvilke tre cifre Georg har valgt.

Opgave 2 Til at starte med har de tre gamblere henholdsvis $\frac{6}{15}$, $\frac{5}{15}$ og $\frac{4}{15}$ af det samlede beløb, og til slut har de henholdsvis $\frac{7}{18}$, $\frac{6}{18}$ og $\frac{5}{18}$ af det samlede beløb i en eller anden rækkefølge. Da de kun spiller med enkroner, og $\frac{4}{15}$ og $\frac{5}{18}$ er uforkortelige brøker, betyder det at det samlede beløb er deleligt med både $15 = 3\cdot5$ og $18 = 2\cdot3^2$. Altså er det samlede beløb deleligt med $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$. Lad det samlede beløb være $90k$. Til at starte med har de tre gamblere derfor $36k$, $30k$ og $24k$ enkroner, og til slut har de henholdsvis $35k$, $30k$ og $25k$ enkroner i en eller anden rækkefølge. Den gambler der har tre kroner mere til slut, må altså være gået fra $24k$ enkroner til $25k$, $30k$ eller $35k$ enkroner, eller fra $30k$ enkroner til $35k$ enkroner. Da k er et helt tal, er eneste mulighed at gambleren er gået fra $24k$ til $25k$ kroner fordi vedkommende ellers ville have fået et multiplum af 5 kroner, 6 kroner eller 11 kroner mere. Altså er $k = 3$, og gambleren har derfor $25 \cdot 3 = 75$ kroner til slut.

Opgave 3 Afsæt punktet E på halvlinjens forlængelse så $|ME| = |MC|$. Da desuden $|MB| = |MA|$, og $\angle BME$ og $\angle AMC$ er topvinkler, er trekanterne BME og AMC kongruente. Heraf følger dels $\angle BEM = u$, dels $|BE| = |AC|$ og dermed $|BE| = |BD|$. Trekant EDB er altså ligebenet, og derfor er vinklerne u og v lige store.



Opgave 4 Hvis tallet $20n = 2^2 \cdot 5 \cdot n$ skal være et kvadrattal, må $n = 5m^2$, hvor m er et positivt helt tal. Nu er

$$5n + 275 = 5(5m^2) + 275 = 5^2(m^2 + 11).$$

Hvis dette tal skal være et kvadrattal, må m^2+11 også være et kvadrattal. Sæt $m^2+11 = k^2$, og omskriv vha. kvadratsætning til $11 = (k+m)(k-m)$. Da 11 er et primtal, er eneste løsning med positive hele tal $k+m = 11$ og $k-m = 1$, dvs. $m = 5$ og $k = 6$. Hvis tallene $20n$ og $5n+275$ skal være kvadrattal, er eneste mulighed altså $n = 5 \cdot m^2 = 5 \cdot 5^2 = 125$. Og denne værdi af n er faktisk brugbar da $20n = (2 \cdot 5^2)^2 = 50^2$ og $5n + 275 = (5 \cdot 6)^2 = 30^2$.

Opgave 5 Vi viser først at $x_0 + x_1 + x_2 \leq 5$:

$$x_0 + x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) + \frac{1}{2}(x_0 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \leq \frac{1}{2}(2 \cdot 1) + \frac{1}{2}(2 \cdot 2) + \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = 5$$

ifølge betingelsen $x_i + x_j \leq 2j$ for $i < j$. Vi har derfor

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + \cdots + x_{2014} &= (x_0 + x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6) + \cdots + (x_{2013} + x_{2014}) \\ &\leq 5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + \cdots + 2 \cdot 2014 \\ &= 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + \cdots + 2 \cdot 2014 \\ &= 1 + 2 \cdot 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 1007) = 1 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1007 \cdot 1008}{2} \\ &= 1 + 2 \cdot 1007 \cdot 1008 = 2030113. \end{aligned}$$

Summen er altså højst 2030113.

Med valget $x_{2n-1} = 2n - 1$ og $x_{2n} = 2n + 1$, altså

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_{2013}, x_{2014}) = (1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, \ldots, 2013, 2015),$$

er kravet $x_i + x_j \leq 2j$ for $i < j$ opfyldt da $x_i + x_j \leq x_{j-1} + x_j = 2j$. Der gælder desuden lighedstegn i alle vurderingerne ovenfor, dvs. summen af disse tal er 2030113, som altså er den maksimale sum.