Retningslinjer for bedømmelsen
Georg Mohr-Konkurrencen 2013
2. runde

Besvarelser som falder uden for de løsninger som ligger til grund for pointskemaerne, bedømmes ved analogi så skridt med tilsvarende vægt i den samlede løsning får tilsvarende point.

Opgave 1

Spørgsmål a

- 1 point for at beskrive en vindende strategi.
- 1 point for at bevise at strategien er vindende.

Spørgsmål b

- 1 point for at påvise at i enhver stilling med mellemrum mellem bilerne kan A vinde med samme strategi som i eksemplet.
- Yderligere 1 pont for at påvise at hvis der ikke er mellemrum mellem bilerne, taber A enten fordi intet første træk er muligt, eller fordi A i sit første træk må frembringe et mellemrum, hvorefter B kan overtage A's tidligere beskrevne strategi.

Bemærkning: Det sidste point kan opnås selv om deltageren ikke udtrykkelig nævner det tilfælde hvor intet første træk er muligt.

Opgave 2

- Det giver 1 point at påvise sammenhængen: areal af de fire måner + areal af den omskrevne cirkel = areal af rektanglet + areal af de fire halvcirkler.

Uafhængigt heraf kan de næste to point opnås:

- 1 point for at udtrykke arealerne af den omskrevne cirkel og halvcirklerne ved rektanglets diagonal og sider.
- Yderligere 1 point for at vise at arealet af den omskrevne cirkel er lig med arealet af de fire halvcirkler.
- Endelig giver det 1 point at konkludere ud fra alt det foregående at arealet af de fire måner er lig med arealet af rektanglet.

Bemærkning: Det kræves ikke bevist at rektanglets diagonaler er diametre i dets omskrevne cirkel.

Opgave 3

- 1 point for at beregne x_4.
- Yderligere 1 point for af $x_4 = x_0$ at udlede at følgen har periode 4.
- Yderligere 1 point for heraf at udlede at $x_n = x_m$ når 4 går op i $n - m$, eventuelt blot for udvalgte tal n og m med n omkring 2013 og m omkring 0. (For eksempel udlede at $x_0 = x_4 = x_8 = \cdots = x_{2012}$).
- Yderligere 1 point for (eventuelt implicit som led i en beregning) at påvise at 4 går op i $2013 - 1$, og udlede $x_{2013} = x_1 = -\frac{9}{7}$.

Opgave 4

I det følgende betegner c det gennemgående ciffer i a, som antages at være et kvadrattal.

Hovedregel:

- Der gives 1 point for udelukkelse af tre værdier af c og derefter 1 point for hver udelukkelse af yderligere to værdier.

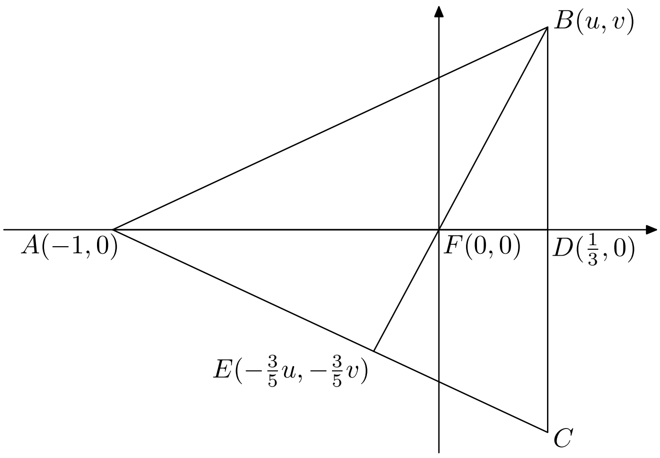
Særregler som overtrumfer hovedreglen:

- 1 point for at udelukke $c = 2, 3, 7$ og 8 og ingen andre. (Den fjerde udelukkelse kan altså ikke udløse et halvt point i dette tilfælde).
- 2 point for at udelukke $c = 1$, 4 og 9 og ingen andre eller én anden værdi.
- Hvis ingen andre point opnås, giver det 1 point at vise at $c = 1$, 4 og 9 er udelukket hvis én af værdierne er det, og $c = 2$ og 8 er udelukket hvis én af værdierne er det.

Opgave 5

Løsning 1: Koordinatregning med anvendelse af oplysningen om at AD er vinkelhalveringslinje

For eksempel: Vælge koordinatsystemet så $A = (-1, 0)$ og $F = (0, 0)$, sætte $B = (u, v)$ og udlede $E = (-\frac{3}{5}u, -\frac{3}{5}v)$. Heraf beregne hældningskoefficienterne α og β for linjerne AB og AE til $\alpha = v/(u + 1)$ og $\beta = (-\frac{3}{5}v)/(-\frac{3}{5}u + 1)$. Så af $\alpha = -\beta$ udlede $u = \frac{1}{3}$, som er D's førstekoordinat, og slutte at BD er parallel med andenaksen, og $\triangle ABC$ dermed ligebenet.



- 1 point for at fastlægge et koordinatsystem ved nogle af punkterne, vælge et punkt hvis koordinater bestemmer de resterendes, og begynde at udtrykke andre elementer af figuren (punktkoordinater, hældningskoefficienter med videre) ved punktets koordinater.
- Yderligere 1 point for udtrykke alle de elementer af figuren som behøves til at opstille en ligning for det valgte punkt eller et andet som bestemmer resten af figuren, ved det valgte punkts koordinater.
- Yderligere 1 point for at opstille og reducere ligningen.
- Yderligere 1 point for udlede at $|AB| = |AC|$.

Løsning 2-5

I alle de følgende løsninger giver det 3 point at vise enten $|BD|/|DC| = 1$ eller $|AE|/|EC| = \frac{3}{2}$ eller en dermed ensbetydende ligning. Læg mærke til at disse ligninger gælder uanset om AD er vinkelhalveringslinje. Det sidste point gives for at kombinere resultatet med oplysningen om at AD er vinkelhalveringslinje, til et bevis for $|AB| = |AC|$. Her må det uden bevis anvendes at en vinkelhalveringslinje i en trekant deler den modstående side i de hosliggendes forhold, eller at trekanten er ligebenet hvis vinkelhalveringslinjen også er median.

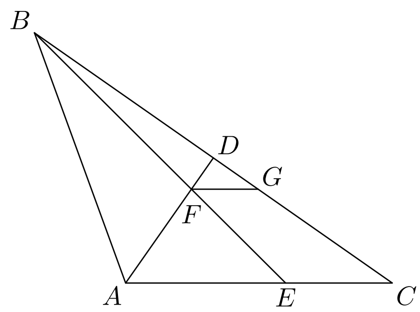
Bemærkning: Et bevis som i bemærkningen i den offentliggjorte løsning kræves altså ikke.

De første 3 point gives forskelligt afhængigt af løsningen:

Løsning 2: Menelaos' sætning

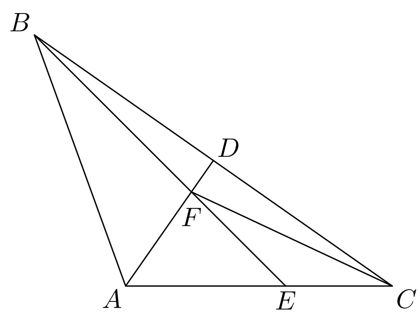
- Det giver 3 point at opnå en ligning ensbetydende med $|BD|/|DC| = 1$ ved at anvende Menelaos' sætning på $\triangle BDF$ med transversal AC eller opnå en ligning ensbetydende med $|AE|/|EC| = \frac{3}{2}$ ved at anvende Menelaos' sætning på $\triangle AEF$ med transversal BC.
- Heraf kan 1 point gives for at vise hensigt om én af disse beregninger, og der kan fratrækkes 1 af de 3 point for mindre fejl.

Løsning 3: Ensvinklede trekanter



- 1 point for at lægge en hjælpelinje (for eksempel $FG \parallel AC$, hvor G ligger på BC) så der fremkommer to par af ensvinklede trekanter (i eksemplet $\triangle DFG \sim \triangle DAC$ og $\triangle BFG \sim \triangle BEC$) som tilsammen forbinder $|AF|/|FD|$ og $|BF|/|FE|$ med $|BD|/|DC|$ eller $|AE|/|EC|$, og vise hensigt om at anvende disse par af ensvinklede trekanter i en beregning.
- Yderligere 1 point for relevant anvendelse af én af de to ligedannetheder.
- Yderligere 1 point for at anvende dette resultat sammen med den anden ligedannethed til at beregne $|BD|/|DC|$ eller $|AE|/|EC|$.

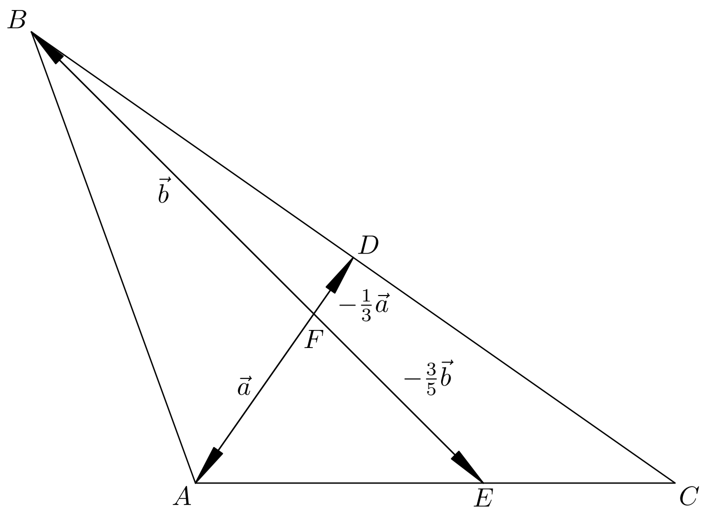
Løsning 4: Arealer



- 1 point for en egnet opdeling af $\triangle ABC$ (for eksempel i $x = \triangle BAD$, $y = \triangle CAF$ og $z = \triangle CFD$) og opstilling af ligninger (i eksemplet $3(x+z) = 5y$ og $y = 3z$) som bestemmer forholdet mellem delenes arealer. Opdelingen skal være sådan at ligningerne fastlægger arealforholdet $\triangle BAD/\triangle CAD$, $\triangle BAF/\triangle CAF$, $\triangle BFD/\triangle CFD$, $\triangle ABE/\triangle CBE$, $\triangle ABF/\triangle CBF$ eller $\triangle AFE/\triangle CFE$.

- Yderligere 1 point for at løse ligningssystemet.
- Yderligere 1 point for at beregne arealforholdet eller et forhold som bestemmer det umiddelbart, og deraf $|BD|/|DC|$ eller $|AE|/|EC|$.

Løsning 5: Vektorregning eventuelt som koordinatregning



- 1 point for at indføre et egnet begyndelsespunkt (for eksempel F) og egnede basisvektorer (for eksempel $\vec{a} = \overrightarrow{FA}$ og $\vec{b} = \overrightarrow{FB}$) og udtrykke alle stedvektorer til de punkter som er nævnt i opgaven, på nær ét (for eksempel C) ved basisvektorerne.
- Yderligere 1 point for at opstille ligninger eller parameterfremstillinger for linjer (i eksemplet AE og BD) gennem det manglende punkt og med brug af dem bestemme punktets stedvektor.
- Yderligere 1 point for at anvende resultatet til at beregne $|BD|/|DC|$ eller $|AE|/|EC|$.

Bemærkning: Hvis beregningen foretages i koordinater, skal »basisvektorer« forstås som et par af koordinatsæt som bestemmer de øvrige.