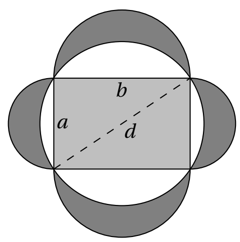
Løsninger til Georg Mohr 2013
2. runde

Opgave 1 a) Vi viser mere generelt at spiller A kan vinde hvis de to biler til at starte med ikke er placeret på to nabofelter. Hvis de to biler ikke står på to nabofelter, når spiller A skal trække, kan spiller A flytte den bagerste bil hen på feltet umiddelbart bag den forreste bil. Det tvinger B til at flytte den forreste bil (så længe det er muligt) og derved skabe en ny situation hvor de to biler ikke står på to nabofelter, når A skal trække. Spiller A kan derfor i hvert træk flytte den bagerste bil hen på feltet bag den forreste. I hvert træk kommer en af bilerne længere til højre, og på et eller andet tidspunkt må bilerne derfor ende på de to felter længst til højre. I denne situation er det B's tur til at trække, og derfor vinder A ved at følge denne strategi.

b) Spiller B kan vinde hvis de to biler til at starte med står på to nabofelter: Hvis de to biler står på de to felter længst til højre, taber A med det samme. Hvis ikke, må spiller A i første træk flytte den forreste bil så der opstår en situation hvor de to biler ikke står på to nabofelter. I denne situation kan B vinde ved at følge den strategi der er beskrevet under a).

Opgave 2 Kald rektanglets sider for a og b og diagonalen for d.



Arealet af de to halvcirkler med diameter a er tilsammen $(\frac{a}{2})^2\pi$, arealet af de to halvcirkler med diameter b er tilsammen $(\frac{b}{2})^2\pi$, og dermed er arealet af de fire halvcirkler tilsammen $((\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2)\pi$. Arealet af rektanglets omskrevne cirkel med diameter d er $(\frac{d}{2})^2\pi$. Ifølge Pythagoras' sætning er $a^2+b^2=d^2$, dvs. $(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2=(\frac{d}{2})^2$. Altså er arealet af de fire halvcirkler lig med arealet af rektanglets omskrevne cirkel. Arealet af de hvide områder på figuren er lig med arealet af rektanglets omskrevne cirkel minus arealet af rektanglet. Arealet af de fire mørkegrå måneformede områder er derfor lig med

$$\begin{aligned}&\text{arealet af de fire halvcirkler} - (\text{arealet af rektanglets omskrevne cirkel} - \text{arealet af rektanglet})\\ &= \text{arealet af rektanglet}\end{aligned}$$

Opgave 3 Først udregnes x_1, x_2, x_3 og x_4:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1+x_0}{1-x_0} = \frac{1+8}{1-8} = -\frac{9}{7},\\
x_2 &= \frac{1+x_1}{1-x_1} = \frac{1-\frac{9}{7}}{1+\frac{9}{7}} = \frac{-\frac{2}{7}}{\frac{16}{7}} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8},\\
x_3 &= \frac{1+x_2}{1-x_2} = \frac{1-\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{8}} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{9}{8}} = \frac{7}{9},\\
x_4 &= \frac{1+x_3}{1-x_3} = \frac{1+\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}} = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{2}{9}} = 8 = x_0.
\end{aligned}$$

Da x_{n+1} kun afhænger af x_n, kan man af $x_4=x_0$ konkludere at talfølgen $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ er periodisk med periode 4. Altså er $x_0=x_4=x_8=\cdots=x_{2012}$, og dermed $x_{2013}=x_1=-\frac{9}{7}$.

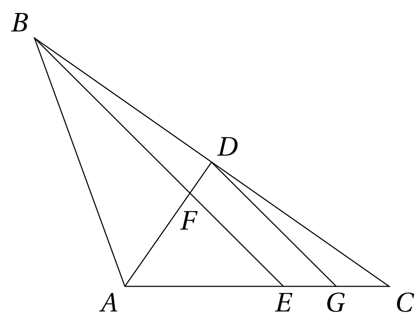
Opgave 4 Lad cifferet i a være c, dvs. at $c = 1,2,3,\dots,9$. Bemærk at c ikke kan være 0 da a er et positivt helt tal. Ethvert positivt helt tal n kan skrives som $n = 10x + y$, hvor x og y er hele tal og $0 \le y \le 9$. Altså kan ethvert kvadrattal skrives som

$$n^2 = (10x+y)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2 = 10\cdot 2(5x^2+xy)+y^2.$$

Antag at $a = n^2$. Hvis n^2 slutter på et ulige ciffer, da slutter n også på et ulige ciffer y. Altså er $y^2 = 1,9,25,49,81$, og antallet af 10'ere i y^2 er dermed lige. Antallet af 10'ere i $n^2 = 10\cdot 2(5x^2+xy)+y^2$ er derfor lige, og næstsidste ciffer i n^2 er derfor også lige. Et kvadrattal kan altså ikke have to ulige cifre til slut, og vi kan udelukke at c er ulige.

Nu mangler vi kun at udelukke $c = 2,4,6,8$. Hvis $c = 2$ eller $c = 6$, er $a = c\cdot 11\dots 1$. Dette tal kan ikke være et kvadrattal, da 2 går op i tallet, mens 2^2 ikke gør fordi $11\dots 1$ er ulige. Hvis $c = 4$, er $a = 2^2\cdot 11\dots 1$. Dette tal kan ikke være et kvadrattal, for da ville $11\dots 1$ også være et kvadrattal, og det har vi tidligere udelukket. For $c = 8$ har vi tilsvarende $a = 2^2\cdot 22\dots 2$, og det kan heller ikke være et kvadrattal da vi tidligere har udelukket at $22\dots 2$ er et kvadrattal. Nu har vi udelukket alle ni muligheder for c og altså vist at a ikke kan være et kvadrattal.

Opgave 5 Tegn en linje parallel med linjen BE fra punktet D, og kald skæringspunktet med siden AC for G.



Trekanterne AFE og ADG er ensvinklede med forholdet $\frac{|AF|}{|AD|} = \frac{3}{4}$ da $\frac{|AF|}{|FD|} = 3$. Altså er $\frac{|DG|}{|FE|} = \frac{4}{3}$. Desuden er $\frac{|FE|}{|BE|} = \frac{3}{8}$ da $\frac{|BF|}{|FE|} = \frac{5}{3}$. Trekanterne DCG og BCE er pr. konstruktion ensvinklede med forholdet $\frac{|DG|}{|BE|} = \frac{|DG|}{|FE|}\cdot\frac{|FE|}{|BE|} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{2}$, og dermed er D midtpunktet af siden BC. Altså er vinkelhalveringslinjen fra A også median i trekanten, og når vinkelhalveringslinjen og medianen fra A er sammenfaldende, er det kendt at trekanten er ligebenet med A som toppunkt, dvs. $|AB| = |AC|$.

Bemærkning: At trekanten er ligebenet med A som toppunkt når vinkelhalveringslinjen og medianen fra A er sammenfaldende, følger fx af sinusrelationen:

$$|AB| = \frac{|BD|}{\sin(\frac{\angle A}{2})}\cdot\sin(\angle ADB) = \frac{|CD|}{\sin(\frac{\angle A}{2})}\cdot\sin(\angle ADC) = |AC|.$$

Det kan også vises uden brug af trigonometri: Lad punktet B' være spejlingen af punktet B i linjen AD. Da AD er vinkelhalveringslinje i trekant ABC, ligger B' på siden AC eller dens forlængelse. Vi ønsker at vise at $B' = C$. Antag derfor at B' og C er forskellige. Da $|BD| = |CD|$, er trekant $B'DC$ pr. konstruktion ligebenet. Derfor er

$$\angle C = \angle ACD = 180^\circ - \angle AB'D = 180^\circ - \angle B$$

i modstrid med at $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Altså er antagelsen om at B' og C er forskellige, forkert. De to trekanter ABD og ACD er derfor kongruente, og specielt er $|AB| = |AC|$.