Løsninger til Georg Mohr-Konkurrencen 2011

2. runde

Opgave 1

Antag at Georg har lagt papirerne i to bunker så ingen af bunkerne indeholder to tal hvis sum er et kvadrattal. Bunken som indeholder papiret med tallet 1, kaldes A, og den anden bunke kaldes B. Da $1+3, 3+6, 6+10, 10+15, 15+1$ er kvadrattal, så gælder: 1 i bunke A, 3 i bunke B, 6 i bunke A, 10 i bunke B, 15 i bunke A og 1 i bunke B. Altså skal papiret med tallet 1 ligge i begge bunker. Det antagne er altså umuligt.

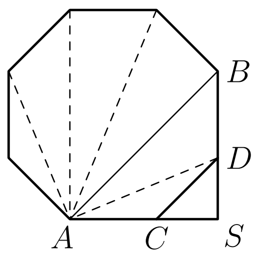
Opgave 2

Først argumenteres for at vinklerne i ottekanten er 135°:

Indtegnes alle diagonaler fra A, så inddeles ottekanten i seks trekanter. Vinkelsummen i ottekanten er lig summen af de seks trekanters vinkelsum; dvs. $6 \cdot 180° = 1080°$. Da alle otte vinkler i ottekanten er lige store, bliver størrelsen af hver vinkel $\frac{1080°}{8} = 135°$.

Lad C og D være hjørner i ottekanten så AC, CD, DB bliver kanter i ottekanten. Linjen gennem A og C skærer linjen gennem B og D i et punkt S. I trekant CDS er vinklerne C og D begge supplementvinkler til en vinkel i ottekanten, og dermed er deres størrelse $180° - 135° = 45°$. Dermed bliver trekant CDS en ligebenet retvinklet trekant med hypotenuselængden 1. Kaldes længden af kateterne i denne trekant for x, følger af Pythagoras' sætning at $x^2 + x^2 = 1$, og dermed $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Trekant ABS og trekant CDS har en fælles ret vinkel S. Trekant ABS er ligebenet da $|AS| = |AC| + x = 1 + x = |BD| + x = |BS|$. Trekanterne ABS og CDS er så ensvinklede med forstørrelsesfaktor $\frac{|AS|}{|CS|} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 + \sqrt{2}$. Dermed er $|AB| = (1+\sqrt{2})|CD| = 1 + \sqrt{2}$.



Opgave 3

Lad $\frac{1}{11} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, hvor n og m er forskellige positive hele tal. Dette omformes til $nm = 11(n+m)$. Heraf følger at 11 går op i nm, og da 11 er et primtal, går 11 op i n eller m. Vi kan uden tab af generalitet antage at 11 går op i n. Dermed findes et positivt helt tal k så $n = 11k$. Dette indsættes i ligningen $nm = 11(n+m)$, hvorefter m isoleres. Det giver

$m = \frac{11k}{k-1}$. Da k og $k-1$ ikke har fælles faktorer (udover 1), må $k-1$ gå op i 11 (m er et helt tal); dvs. k er 2 eller 12. Sammenfattende har vi at $(n,m) = (11k, \frac{11k}{k-1})$ med k lig 2 eller 12. Med $k = 2$ fås $(n,m) = (22,22)$, og med $k = 12$ fås $(n,m) = (132,12)$. Da n og m skal være forskellige, er $(n,m) = (132,12)$ eneste mulighed. Da $\frac{1}{132} + \frac{1}{12} = \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{11}{11 \cdot 12} = \frac{1+11}{11 \cdot 12} = \frac{1}{11}$, er der netop én måde at skrive brøken $\frac{1}{11}$ som $\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, hvor n og m er to forskellige hele tal, nemlig $\frac{1}{132} + \frac{1}{12}$.

Opgave 4

Lad $h(x) = f(f(x)) - x$. Vi skal vise at der findes et tal a så $h(a) = 0$ og $f(a) \neq a$.

Der gælder: $h(1) = f(f(1)) - 1 = f(-1) - 1 = 3 - 1 = 2 > 0$ og $h(2) = f(f(2)) - 2 = f(0) - 2 = 0 - 2 = -2 < 0$.

Da $h(1)$ og $h(2)$ har forskelligt fortegn, og h er kontinuert, findes et tal a mellem 1 og 2 så $h(a) = 0$. Da grafen for f er en parabel der vender grenene opad, og $f(1) = -1 < 0$ og $f(2) = 0$, ved vi at $f(x) < 0$ for alle x mellem 1 og 2; specielt $f(a) < 0 < a$. Dermed er det ønskede vist.

Opgave 5

Lad n og m være sidste ciffer i henholdsvis c^2 og b^2; så gælder $c^2 = 10b^2 + n$ og $b^2 = 10a^2 + m$.

Antag $n = 0$. Så er $c^2 = 10b^2$, men dermed indgår primfaktoren 2 (eller 5) med lige multiplicitet i c^2 og ulige multiplicitet i $10b^2$. Modstrid! Altså $n > 0$.

Indsættes udtrykket for b^2 i udtrykket for c^2, fås $c^2 = 10(10a^2 + m) + n = (10a)^2 + 10m + n$ og dermed $(10a)^2 < c^2 < (10a)^2 + 100$. Af første del af dobbeltuligheden fås $c \geq 10a + 1$ og dermed $c^2 \geq (10a)^2 + 20a + 1$. Dermed $(10a)^2 + 20a + 1 \leq c^2 < (10a)^2 + 100$, hvoraf det fremgår at $a < 5$.

$a = 4$: $b^2 = 160 + m$. Dvs. $b^2 = 169$, og dermed $c^2 = 1690 + n$; men der findes ingen kvadrattal mellem 1690 og 1700 ($41^2 = 1681 < 1690$ og $42^2 > 1700$). Ingen løsninger for $a = 4$.

$a = 3$: $b^2 = 90 + m$; men der findes ingen tocifrede kvadrattal der begynder med 9. Ingen løsninger for $a = 3$.

$a = 2$: $b^2 = 40 + m$. Dvs. $b^2 = 49$, og dermed $c^2 = 490 + n$; men der findes ingen kvadrattal mellem 490 og 500 ($22^2 = 484 < 490$ og $23^2 = 529 > 500$). Ingen løsninger for $a = 2$.

$a = 1$: $b^2 = 10 + m$. Dvs. $b^2 = 16$, og dermed $c^2 = 160 + n$. Dermed $c^2 = 169$.

Altså $(c^2, b^2, a^2) = (169, 16, 1)$, og dermed er $(a, b, c) = (1, 4, 13)$ eneste talsæt der opfylder det ønskede.