Retningslinjer for bedømmelsen.
Georg Mohr-Konkurrencen 2010
2. runde

Det som skal vurderes i bedømmelsen af en besvarelse, er om deltageren har formået at analysere problemstillingen, kombinere de givne oplysninger til et svar på det stillede spørgsmål og argumentere overbevisende og udtømmende for svaret. Derimod er det ikke i sig selv væsentligt i hvilken grad deltageren viser beherskelse af matematikkens formelle apparat eller færdigheder inden for skolernes pensum.

Der kan gives indtil 4 point for hver af de 5 opgaver. En helt korrekt og fuldstændig besvarelse giver 4 point, og der gives ikke fuldt pointtal medmindre besvarelsen er i alt væsentligt korrekt og fuldstændig. For en delvis korrekt besvarelse eller blot skridt eller ideer som leder i retning af en løsning, kan der gives et eller flere point. Derimod giver regninger eller argumenter som ikke bringer deltageren nærmere en løsning, ikke point uanset om de er rigtige i sig selv. Tilfældige indfald uden funktion i sammenhængen tæller ikke i sig selv positivt ved bedømmelsen.

Bedømmelsen har til formål at fastslå hvem der har løst opgaverne bedst. Derfor skal kun konkrete skridt i retning af en løsning honoreres, og det skal ikke tages i betragtning om deltageren i øvrigt synes at have ydet en anerkendelsesværdig indsats.

Opgave 1

- Det giver 1 point at identificere radius R i den store cirkel og radius r i den lille med den største katete og længden af højden fra den rette vinkel på hypotenusen.

- Det giver 2 point at bestemme r (eller bestemme $\frac{r}{R}$) fx ved arealformler, ensvinklede trekanter, trigonometri eller regning med Pythagoras' sætning anvendt på trekanten og to deltrekanter. Væsentlige fremskridt i beregningen giver 1 af disse point, men udregning af hypotenusens længde alene er ikke nok til at udløse dette point.

- Det giver yderligere 1 point at bestemme den brøkdel den lille cirkels areal udgør af den stores, dvs. udregne $\frac{\pi r^2}{\pi R^2}$ eller $(\frac{r}{R})^2$.

Bemærkning: Ordet 'brøkdel' angiver at svaret skal skrives som heltalsbrøk, som 0,2, som 20% eller lignende. Hvis det afsluttende udtryk ikke er skrevet på en af disse måder, trækkes 1 point fra det pointtal besvarelsen i øvrigt berettiger til. Specielt giver svaret $(\sin\tan^{-1}\frac{1}{2})^2$ eller lignende som resultat af en rigtig udledning altså 3 point.

Opgave 2

- Det giver 2 point at vise at hvert tal i en bestemt mængde M af hele tal, for eksempel alle ulige tal eller alle tal som ikke er kongruente med 2 modulo 4, kan skrives som en differens mellem to kvadrater af hele tal. Mængden skal være en sådan at det er åbenlyst at ethvert helt tal som ikke tilhører den, kan dannes ved at der lægges et kvadrattal til et af dens elementer.

  Heraf gives 1 point for væsentlige fremskridt mod et sådant bevis. Eksempler: 1) Sætte $a = c + 1$ eller $a = c - 1$ og opnå $a^2 - c^2 = \pm\ 2c + 1$. 2) Foretage omskrivningen $a^2 - c^2 = (a + c)(a - c)$ og diskutere faktorernes relative paritet.

- Det giver yderligere 2 point at anvise hvordan ethvert helt tal kan dannes ved at et helt tals kvadrat lægges til et element i M.

  Heraf giver det 1 point at nævne at et tal der kan skrives som $a^2 - c^2$, også kan skives som $a^2 + b^2 - c^2$ med $b = 0$, eller det tilsvarende med a og b byttet om.

Opgave 3

Enhver løsning kan have to varianter. I den ene variant er udgangspunktet at ingen holder to piger i hånden. Dette vises så at føre til en modstrid. Et sådant argument kaldes i det følgende et 'modstridsargument'. I den anden variant vises det at der i enhver mulig række er en dreng eller pige der holder to piger i hånden, så opgavens spørgsmål må besvares benægtende. Et sådant argument kaldes i det følgende et 'konstruktionsargument'. For hver af de fire løsninger som er nævnt i det følgende, er pointskemaet bygget sådan op at der gives 1 point for den grundlæggende ide. Fordelingen af de øvrige 3 point er forskellig afhængigt af om der i løsningen styres mod et bevis ved modstrid eller konstruktion.

Bemærkning: Et rigtigt delargument i en samlet argumentation for svaret 'ja' giver tilsvarende point hvis det svarer til et af punkterne i nedenstående skema.

a. To delrækker med hver anden i hver række.

- Det giver 1 point at betragte de to delrækker af hver anden plads i rækken.

Modstridsargument:

- Det giver 1 point at nå frem til at i ingen af delrækkerne står to piger ved siden af hinanden.
- Det giver 1 point at udlede heraf at der højst er 15 piger i hver delrække.
- Det giver 1 point at konkludere at dette strider mod hvad der er oplyst om antallet af piger.

Konstruktionsargument:

- Det giver 1 point at nå frem til at der mindst er 16 piger i en af delrækkerne.
- Det giver 1 point at nå frem til at der så et sted i denne delrække står to piger ved siden af hinanden.

- Det giver 1 point at konkludere at opgaven må besvares benægtende fordi den der står mellem disse to piger, holder dem begge i hånden.

b. Afsnit af længde 4 eller lignende løsninger.

- Det giver 1 point at indføre en opdeling af rækken i 15 afsnit a 4.

Modstridsargument:

- Det giver 1 point at nå frem til at der højst er to piger i hvert afsnit.
- Det giver 1 point at udlede heraf at der højst er 30 piger i alt.
- Det giver 1 point at konkludere at dette strider mod hvad der er oplyst om antallet af piger.

Konstruktionsargument:

- Det giver 1 point at nå frem til at der mindst er tre piger i et af afsnittene.
- Det giver 1 point at nå frem til at der i dette afsnit er en som holder to piger i hånden.
- Det giver 1 point at konkludere at opgaven dermed må besvares benægtende.

Bemærkning: Der gives point tilsvarende hvis der er argumenteret på lignende måde på grundlag af andre opdelinger af rækken.

c. Sammenhængende pige/drengerækker.

- Det giver 1 point at betragte sammenhængende rækker af henholdsvis piger og drenge.

Modstridsargument:

- Det giver 1 point at nå frem til at der højst er to piger i en pigerække og mindst to drenge i en drengerække omsluttet af pigerækker.
- Det giver 1 point at udlede heraf at der højst er 14 drengerækker og dermed højst 15 pigerækker.
- Det giver 1 point at konkludere at der så højst er 30 piger i hele rækken, og at dette strider mod hvad der er oplyst.

Konstruktionsargument:

- Det giver 1 point at nå frem til at hvis der højst er to piger i hver pigerække, er der mindst 16 pigerækker, eller at hvis der mindst er to drenge i hver drengerække omsluttet af pigerækker, er der højst 14 sådanne drengerækker.
- Det giver 1 point at ræsonnere enten at hvis der mindst er 16 pigerækker, er der mindst 15 drengerækker omsluttet af pigerækker og dermed mindst en sådan række med kun en dreng, eller at hvis der højst er 14 drengerækker omsluttet af pigerækker, er der højst 15 pigerækker og dermed en pigerække med mindst tre piger.

- Det giver 1 point at konkludere at der enten er tre piger i en af pigerækkerne eller en drengerække omsluttet af pigerækker med kun en dreng, og at i begge tilfælde er der en der holder to piger i hånden, så opgaven må besvares benægtende.

d. Drenge i forhold til piger.

- Det giver 1 point at betragte sammenhængende rækker af henholdsvis piger og drenge.

Modstridsargument:

- Det giver 1 point at nå frem til at der højst er to piger i en pigerække og mindst to drenge i en drengerække omsluttet af pigerækker.
- Det giver 1 point at udlede heraf at hvis der er to piger i den sidste pigerække regnet fra en af enderne, findes der en anden pigerække hvor der kun er en pige, og der derfor i hele rækken er mindst en dreng for hver pige før den sidste.

  Variant: Det giver 1 point at nå frem til at der findes en pigerække med kun en pige, og at der i de to afsnit som rækken deles i af denne pige (hvoraf det ene eventuelt er tomt), er mindst en dreng for hver pige.
- Det giver 1 point at konkludere enten at antallet af drenge overstiger 29, eller det samlede antal drenge og piger overstiger 60, i modstrid med hvad der er oplyst.

Konstruktionsargument:

- Det giver 1 point at nå frem til at der enten findes en pigerække med mindst tre piger eller en pigerække med kun en pige og mindst 15 andre pigerækker.
- Det giver 1 point i sidste tilfælde at se på drengerækken efter hver af de 15 pigerækker regnet i retning fra enderne hen til den ene pige og nå frem til at der i mindst en af disse drengerækker kun er en dreng.
- Det giver 1 point at konkludere at der enten er tre piger i en af pigerækkerne eller en drengerække omsluttet af pigerækker med kun en dreng, og at i begge tilfælde er der en der holder to piger i hånden, så opgaven må besvares benægtende.

Opgave 4

I det følgende er F og G betegnelser for BC's skæringspunkter med AD og AE.

a. Ligedannethed.
Ligedannetheder som $\triangle DMF \sim \triangle ABF$, $\triangle DBF \sim \triangle ACF$ eller $\triangle DHF \sim \triangle AMF$, hvor M betegner BC's midtpunkt og H projektionen af D på BC, bevises og benyttes til at bevise at et forhold som $|MF| : |BF|$, $|BF| : |CF|$ eller $|HF| : |MF|$ er lig med $1 : 2$. Heraf udledes $|BF| = \frac{1}{3}|BC|$ eller $|CG| = \frac{1}{3}|BC|$.

- Det giver 2 point at vise at et par af tilsvarende vinkler i et sådant par af trekanter er lige store. For hvert par af vinkler gives 1 af disse point. Når det benyttes at en vinkel er $60°$, skal det være begrundet omhyggeligt ud fra opgavens oplysninger medmindre det er en vinkel i $\triangle ABC$.

- Det giver yderligere 1 point at konkludere at trekanterne er ensvinklede, og heraf udlede $|MF| : |BF| = 1 : 2$ eller det tilsvarende.
- Det giver 1 point at udlede $|BF| = \frac{1}{3}|BC|$ eller $|CG| = \frac{1}{2}|BC|$ heraf og konkludere at F og G deler BC i lige store stykker. Hvis et punkt som H benyttes, skal det vises at være midtpunkt for et linjestykke som BM, for eksempel ved at det vises at en trekant som BMD er ligesidet.

b. Centralprojektion.
Med P og Q betegnes linjen DE's skæringspunkter med linjerne AB og AC. Da trekanterne BDP og CEQ er ligesidede, deler D og E linjestykket PQ i lige store stykker. Da der gælder $BC \| PQ$, deler F og G så linjestykket BC i lige store stykker.

- Det giver 2 point at vise at to vinkler i en trekant som BDP er lig med $60°$, så trekanten er ligesidet. For hver vinkel gives 1 af disse point.
- Det giver 1 point at vise at D og E så deler PQ i lige store stykker.
- Det giver 1 point at vise at F og G så deler BC i lige store stykker.

c. Trekantnet.
Planet tænkes inddelt i ligesidede trekanter med sidelængde $\frac{1}{2}|BC|$ således at B og C ligger i gitterpunkter. Det vises at A, D og E også ligger i gitterpunkter. Punkterne P og Q som i løsning *b* indføres som nabogitterpunkterne til D og E på linjen DE. Resten af beviset forløber som i løsning *b*.

- Det giver 1 point at indføre nettet af ligesidede trekanter med B og C som gitterpunkter.
- Det giver 1 point at vise at A, D og E også er gitterpunkter.
- Det giver 1 point at indføre punkterne P og Q.
- Det giver 1 point at gøre rede for at fordi D og E deler PQ i lige store stykker, deles BC af F og G i lige store stykker.

d. Trigonometri.
Længden $|BF|$ bestemmes ved trigonometriske beregninger på trekant ABD enten i kombination med beregninger på en af deltrekanterne ABF og DBF eller dem begge eller med udnyttelse af at BF er vinkelhaveringlinje i trekanten. (Variant: Det tilsvarende ved betragtning af trekant ACE).

- Det giver 1 point at opnå $\angle ABD = 120°$ eller $\angle ACE = 120°$. Dette skal være begrundet omhyggeligt ud fra opgavens oplysninger.
- Det giver yderligere 2 point at opnå et eksakt beregningsudtryk for et af forholdene $|BF| : |BC|$ eller $|CG| : |BC|$ eller for $|BF|$ eller $|CG|$ med en antaget værdi af siden i trekant ABC ved beregninger som beskrevet i indledningen.
- Heraf gives 1 point for væsentlige fremskridt i en sådan beregning. Eksempler: 1) Opnå et eksakt udtryk for en trigonometrisk funtion af $\angle BAD$ eller $\angle BDA$ eller for $|AD|$ med en antaget værdi af siden i $\triangle ABC$. 2) Bemærke at $|BF|$ kan beregnes ved at arealet af $\triangle ABD$ udtrykkes som summen af deltrekanternes arealer fordi BF er side i begge deltrekanter.

- Det giver 1 point at regne udtrykket ud til $|BF| = \frac{1}{3}|BC|$ eller $|CG| = \frac{1}{3}|BC|$ og konkludere at F og G deler BC i lige store stykker.

e. Analytisk geometri.
Ligninger for linjerne BC og enten AD eller AE opstilles eller anvendes implicit, det sidste i det tilfælde hvor linjen (mest nærliggende BC) er akse i koordinatsystemet. Skæringspunktet bestemmes ved at ligningerne løses. Af skæringspunktets koordinater aflæses $|BF| = \frac{1}{3}|BC|$ eller $|CG| = \frac{1}{3}|BC|$.

- Det giver 2 point at bestemme de punktkoordinatsæt som behøves for at opstille ligninger som fastlægger koordinaterne til F eller G. Koordinaterne kan for eksempel bestemmes med trigonometri og kendte værdier af trigonometriske funktioner, med brug af figurens symmetri og Pythagoras' sætning eller, for D's eller E's vedkommende, med brug af symmetri, ligningen for cirklen $ADEB$ og en af ligningerne $|BD| = |DE|$ og $|CE| = |DE|$.

- Heraf giver det 1 point at bestemme koordinaterne til et enkelt af punkterne hvis det ikke indgår i fastlæggelsen af det valgte koordinatsystem.

- Det giver yderligere 1 point at opstille og løse ligningerne.

- Det giver 1 point at vise på grundlag af de fundne koordinater og symmetri eller analogi at F og G deler BC i lige store stykker.

Opgave 5

Overalt i det følgende betegner n og m positive, hele tal, R betegner rækken $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2009}$, mens R_∞ betegner den uendelige række $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$.

Bemærkning 1: Det er ikke et krav at det nævnes udtrykkeligt at antallet af cifre i 2^n er en svagt voksende funktion af n, det skal blot fremgå implicit.

Bemærkning 2: Det regnes ikke for en væsentlige fejl for eksempel at formode at der er 2009 tal i R, eller at 10^{606} har 606 cifre.

a. Struktur af en dekade.
Svaret fås ved at sammenholde mulige mønstre af begyndelsescifrene i en dekade med antallene af elementer og dekader i R. Der gives 1 point for hvert af nedennævnte skridt, som ikke nødvendigvis må tages i rækkefølge.

- Begrunde at der for ethvert n findes netop et n-cifret tal fra R_∞ der begynder med 1, netop et der begynder med 2 eller 3, og netop et der begynder med 4, 5, 6 eller 7. (Variant: 5, 6, 7, 8 eller 9 i stedet for 4, 5, 6 eller 7).

Bemærkning: Det det her drejer sig om, er at analysere strukturen af en dekade i R_∞. Derfor er det ikke nødvendigt at deltageren udtrykkeligt ser på hele den uendelige række.

- Udlede at tallene i R netop er de tal fra R_∞ som højst har 605 cifre.

- Udlede at der i R er 605 tal som begynder med 1, 605 som begynder med 2 eller 3, og 605 som begynder med 4, 5, 6 eller 7, samt at der er netop et tal der begynder med 4 for hvert tal der begynder med 8 eller 9. (Variant: 605 tal som begynder med 1, 605 som begynder med 2 eller 3, og 605 som begynder med 5, 6, 7, 8 eller 9).

  Alternativt nå frem til at der for alle n er tre eller fire n-cifrede tal i R_∞, hvor antallet er fire netop hvis netop et af tallene begynder med 4.

- Nå frem til at R indeholder 2010 tal, og kombinere dette med det foregående til at $2010 - 3 \cdot 605 = 195$ af dem begynder med 4.

b. Rækker af flere dekader.
Det vises at afstanden i R_∞ mellem to på hinanden følgende tal der begynder med 4, er enten 10 eller 13. Svaret fås så ved at sammenholde mulige mønstre af begyndelsescifrene i tilsvarende rækker af 10 eller 13 tal med antallene af elementer og dekader i R. Der gives 1 point for hvert af nedennævnte skridt.

- Vise at hvis 2^n og 2^m begynder med 4, og $m > n$, gælder $m - n \geq 10$.

- Yderligere vise at R_∞ kan inddeles i afsnit af længden 10 eller 13 (i det følgende benævnt 10- og 13-rækker) således at det første tal i hvert afnit begynder med 1, det tredje begynder med 4 og er det eneste i afsnittet med dette begyndelsesciffer, og en 10-række strækker sig over 3 dekader og en 13-række over 4 dekader, samt at de tal som begynder med 1, har bestemte positioner inden for en 10- eller 13-række.

- På grundlag af det foregående og oplysningerne om 2^{2010} opstille ligninger for antallene af 10- og 13-rækker som bestemmer disse to tal, for enhver mulig position af 2^{2010} inden for en 10- eller 13-række, eller noget tilsvarende.

- Vise at ligningerne i alle tilfælde medfører at 195 tal i R begynder med 4, eller et tilsvarende argument.