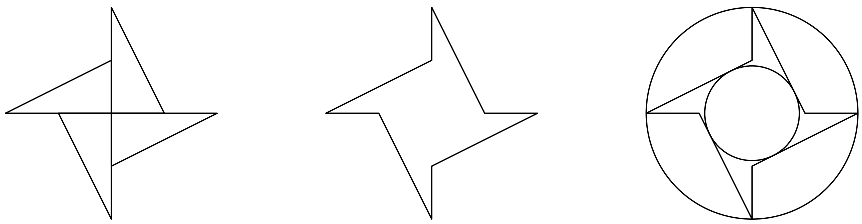
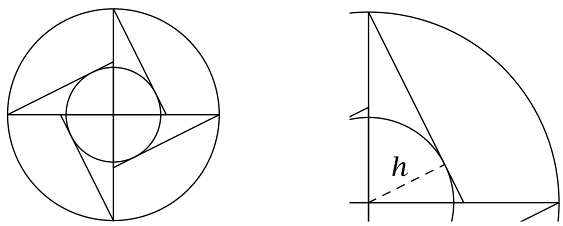
Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 2010

Opgave 1. *Fire retvinklede trekanter hver med katetelængderne* 1 *og* 2 *samles til en figur som vist. Hvor stor en brøkdel udgør den lille cirkels areal af den stores?*



Løsning. Den lille cirkels og den store cirkels centrum er placeret i det punkt hvor de fire trekanters rette vinkler mødes, da dette punkt har samme afstand til de fire trekanters fjerneste vinkelspidser samt samme afstand til de fire trekanters hypotenuser, som den lille cirkel tangerer. Radius i den store cirkel er derfor længden af trekantens længste katete, dvs. 2, og den store cirkels areal er $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$. Radius i den lille cirkel er lig med højden h på hypotenusen i de retvinklede trekanter (fordi hypotenusen er tangent til cirklen, og tangenten står vinkelret på radius i sit røringspunkt).



Længden af hypotenusen er ifølge Pythagoras' sætning $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, og højden h kan findes ved at udtrykke arealet af en af trekanterne på to måder $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \sqrt{5}$, hvoraf $h = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Den lille cirkels areal er dermed $\pi \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}\pi$, og den lille cirkels areal udgør derfor $\frac{\frac{4}{5}\pi}{4\pi} = \frac{1}{5}$ af den store cirkels areal.

Opgave 2. *Bevis at der for ethvert helt tal* n *findes hele tal* a, b *og* c *så* $n = a^2 + b^2 - c^2$.

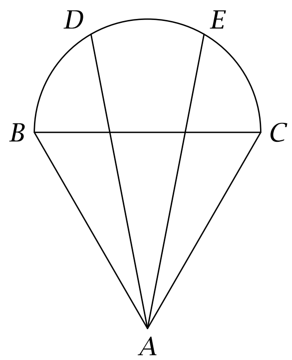
Løsning. Bemærk først at ethvert ulige tal n kan skrives som $n = 2m + 1$, hvor m er et helt tal. Da $(m+1)^2 - m^2 = m^2 + 2m + 1 - m^2 = 2m + 1$, kan n skrives $n = (m+1)^2 - m^2$. Dvs. at ethvert ulige tal kan skrives på formen $b^2 - c^2$, hvor b og c er hele tal.

Heraf følger nu at der for alle hele tal n findes hele tal a, b og c så $n = a^2 + b^2 - c^2$. Ethvert ulige tal kan nemlig skrives som $0^2 + b^2 - c^2$, og et ethvert lige tal kan skrives som summen af 1 og et ulige tal, altså som $1^2 + b^2 - c^2$.

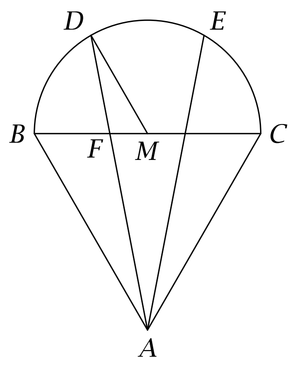
Opgave 3. *Kan* 29 *drenge og* 31 *piger stilles op på række med hinanden i hånden så ingen holder to piger i hånden?*

Løsning. Nej, det er ikke muligt. Lad pigerne og drengene være opstillet på en række. Rækken opdeles i to rækker således at hver anden person, startende med første person fra højre, udgør række A, og hver anden person, startende med anden person fra højre, udgør række B. At der ikke findes en person som holder to piger i hånden i den oprindelige række, svarer netop til at der ikke står to piger ved siden af hinanden hverken i række A eller i række B. Hvis der ikke findes en person der holder to piger i hånden, kan vi derfor slutte at højst 15 af de 30 personer i række A er piger, og højst 15 af de 30 personer i række B er piger, men da der i de to rækker tilsammen er 31 piger, er dette umuligt.

Opgave 4. *En ligesidet trekant ABC er givet. Med BC som diameter tegnes en halvcirkel uden for trekanten. På halvcirklen vælges punkter D og E så buelængderne BD, DE og EC er lige store. Bevis at linjestykkerne AD og AE deler siden BC i tre lige store stykker.*



Løsning. Kald midtpunktet af linjestykket BC for M og skæringen mellem BC og AD for F.



Cirkeludsnittet BMD udgør netop en tredjedel af halvcirklen da buestykket BD udgør en tredjedel af halvcirkelbuen, og dermed er $\angle BMD = 60°$. Kald trekantens sidelængde for s. Radius i halvcirklen er da $\frac{s}{2}$, dvs. at $|MD| = \frac{s}{2}$. Trekanterne FDM og FAB er derfor ensvinklede med forholdet $1 : 2$ da $\angle BFA = \angle DFM$, $\angle ABF = 60° = \angle FMD$ og $|AB| = s = 2|DM|$. Af dette følger at $|BF| = 2|FM|$, dvs. $|BF| = \frac{2}{3}|BM| = \frac{1}{3}|BC|$, og altså at BF udgør en tredjedel af BC. Da figuren er symmetrisk omkring aksen AM, viser dette at linjestykkerne AD og AE deler siden BC i tre lige store stykker.

Opgave 5. *Det oplyses at* 2^{2010} *er et* 606*-cifret tal som begynder med* 1*. Hvor mange af tallene* $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2009}$ *begynder med* 4*?*

Løsning. I talrækken $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$ er hvert tal efter det første det dobbelte af det foregående. Antallet af tallenes cifre øges derfor højst med et for hvert nyt tal i rækken. Det første tal, 1, begynder med 1. I øvrigt begynder et tal med 1 netop hvis det har et ciffer mere end sin forgænger. Da 2^{2010} begynder med 1 og består af 606 cifre, er de 2010 tal $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2009}$ netop alle dem fra rækken med højst 605 cifre, og der er netop 605 af dem som begynder med 1. De tal i rækken der begynder med 2 eller 3, ligger umiddelbart efter tallene der begynder med 1. Derfor er der også 605 af disse tal blandt $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2009}$. Tallene der begynder med 4, 5, 6 eller 7, ligger umiddelbart efter tallene der begynder med 2 eller 3. Derfor er der også 605 af disse tal blandt $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2009}$. Resten af de 2010 tal, dvs. i alt $2010 - 3 \cdot 605 = 195$, begynder med 8 eller 9. Disse tal og kun disse tal har lige foran sig i rækken et tal der begynder med 4. Derfor begynder 195 tal blandt tallene $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2009}$ med 4.