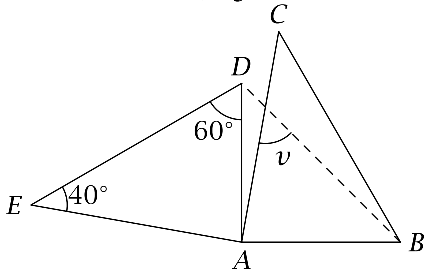
Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 2009

Opgave 1. *I figuren nedenfor fremkommer trekant ADE af trekant ABC ved en drejning på 90° om punktet A. Hvis vinkel D er 60°, og vinkel E er 40°, hvor stor er så vinkel v?*



Løsning. Vinkelsummen i en trekant er 180°, og derfor er

$$\angle DAE = 180^\circ - \angle ADE - \angle AED = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ.$$

Da trekant ADE fremkommer ved at dreje trekant ABC 90° om punktet A, er $|AB| = |AD|$, $\angle BAD = 90^\circ$ og $\angle BAC = \angle DAE = 80^\circ$. Dermed er trekant ABD en retvinklet ligebenet trekant, og altså er $\angle ABD = \angle ADB = 45^\circ$. Lad F være skæringspunktet mellem linjerne AC og BD, og betragt trekant ABF. Da vi nu kender to af vinklerne i trekant ABF, kan vi udregne vinkel v:

$$\begin{aligned} v &= 180^\circ - \angle FAB - \angle FBA \\ &= 180^\circ - \angle CAB - \angle DBA \\ &= 180^\circ - 80^\circ - 45^\circ \\ &= 55^\circ. \end{aligned}$$

Opgave 2. *Løs ligningssystemet*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y} + x &= 3 \\ \frac{x}{x+y} &= 2. \end{aligned}$$

Løsning. Bemærk først at ifølge den anden ligning i ligningssystemet er $x = 0$ ikke en løsning. Antag derfor at $x \neq 0$, og gang første ligning i ligningssystemet igennem med x. Dette omformer systemet til

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+y} + x^2 &= 3x \\ \frac{x}{x+y} &= 2. \end{aligned}$$

Ved at trække ligningerne fra hinanden kan vi eliminere variablen y og opnå en andengradsligning $x^2 = 3x - 2$ i x. Ligningen $x^2 - 3x + 2 = 0$ omskrives til $(x-1)(x-2) = 0$, og vi kan heraf se at de eneste mulige x−værdier som kan løse ligningssystemet, er $x = 1$ og $x = 2$. Nu finder vi de tilhørende y−værdier. Ved at indsætte $x = 1$ i den anden ligning i ligningssystemet får vi $\frac{1}{1+y} = 2$, hvoraf $y = -\frac{1}{2}$. For at tjekke at dette også er en løsning til den første ligning, indsættes i denne, og det ses at det er en løsning. Ved indsættelse af $x = 2$ i den anden ligning i ligningssystemet fås $\frac{2}{2+y} = 2$, hvoraf $y = -1$. Som før tjekker vi at disse værdier af x og y også løser første ligning. De to eneste løsninger (x, y) til ligningssystemet er dermed $(1, -\frac{1}{2})$ og $(2, -1)$.

Opgave 3. *Georg har til en fest købt masser af fyldte chokolader, og da han tæller hvor mange han har, opdager han at antallet er et primtal. Han fordeler så mange af chokoladerne som muligt på* 60 *fade med lige mange på hvert. Han konstaterer derefter at han har mere end ét stykke tilbage, og at antallet af tiloversblevne stykker ikke er et primtal. Hvor mange stykker chokolade har Georg til overs?*

Løsning. Kald antallet af fyldte chokolader for n, antallet af fyldte chokolader på et fad for m og det overskydende antal for r. Da er

$$n = 60 \cdot m + r = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot m + r$$

og

$$2 \leq r < 60.$$

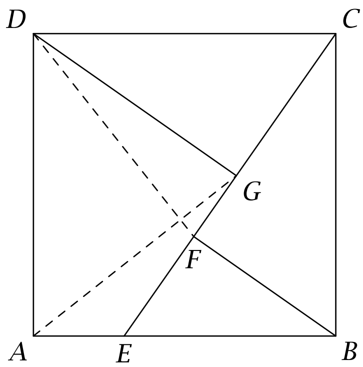
Da n er et primtal, og r ikke er det, må n være større end r. Hvis et af primtallene 2, 3 eller 5 er divisor i r, er det også divisor i summen $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot m + r$ da det er divisor i begge led, men dette er umuligt da n er et primtal større end r.

Primtallet 7 er derfor den mindst mulige divisor i r som er større end 1, og dermed er den størst mulige divisor i r som er mindre end r, højst $\frac{r}{7}$. Da $\frac{r}{7} < \frac{60}{7} < 9$, og 2, og dermed også 8, ikke er divisor i r, er 7 også den størst mulige divisor i r som er mindre end r, og eneste mulighed er derfor $r = 7^2 = 49$. Der er altså 49 fyldte chokolader tilovers.

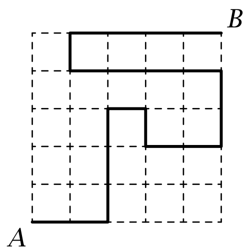
Bemærkning. Mulige værdier af n er $109, 229, 349, 409, 709, 769, 829, 1069, \ldots$.

Opgave 4. *Lad E være et vilkårligt punkt forskelligt fra A og B på siden AB af et kvadrat $ABCD$, og lad F og G være punkter på linjestykket CE så BF og DG står vinkelret på CE. Bevis at $|DF| = |AG|$.*

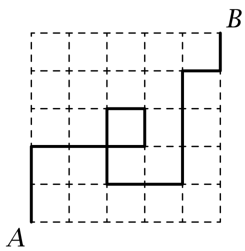
Løsning. Ved en drejning på $90°$ omkring centrum af kvadratet $ABCD$ i retningen der fører B over i C, vil C føres over i D. Da linjen BF står vinkelret på linjen CG, og linjen CF står vinkelret på linjen DG, vil drejningen føre linjen BF i linjen CG og linjen CF i linjen DG. Dermed føres skæringspunktet F mellem linjerne BF og CF over i skæringspunktet G mellem linjerne CG og DG. Ved drejningen føres F altså i G og D i A, og dermed føres linjestykket DF i linjestykket AG. Da længder bevares ved drejning, er de to linjestykker DF og AG lige lange.



Opgave 5. *Forestil dig et kvadratisk skema der består af $n \times n$ felter med kantlængde 1, hvor n er et vilkårligt positivt helt tal. Hvad er den størst mulige længde af en rute du kan følge langs felternes kanter fra punktet A i nederste venstre hjørne til punktet B i øverste højre hjørne hvis du aldrig må vende tilbage til et punkt hvor du har været før? (Figuren viser for $n = 5$ et eksempel på en tilladt rute og et eksempel på en ikke tilladt rute).*

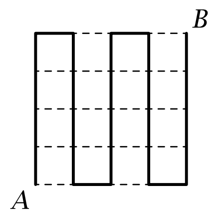


tilladt rute



ikke tilladt rute

Løsning. Et skema der består af $n \times n$ felter, indeholder $(n+1)^2$ gitterpunkter, og da man starter i et gitterpunkt og for hvert skridt ender i et nyt gitterpunkt, kan en rute ikke være længere end $(n+1)^2 - 1$. Hvis n er lige, er det muligt at konstruere en rute af denne længde på følgende måde: Start i A og gå n skridt op. Gå derefter et skridt til højre, n skridt ned, et skridt til højre, n skridt op, osv. Da n er lige, skal vi gå et lige antal skridt til højre for at nå B, og vi ender dermed med at gå op efter vores sidste skridt til højre, dvs. vi ender i B efter at have været gennem samtlige gitterpunkter i kvadratet. På figuren er vist et eksempel med $n = 4$. Når n er lige, er den maksimale længde af en tilladt rute dermed $(n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$.



Når n er ulige, er det ikke muligt at konstruere en rute som går gennem alle gitterpunkter: Farv gitterpunkterne grønne og gule således at gitterpunkter på en lodret linje er skiftevis gule og grønne, og gitterpunkter på en vandret linje også er skiftevis gule og grønne. På denne måde får A og B samme farve, og hvert eneste skridt på ruten går mellem to gitterpunkter af forskellig farve, og dermed vil en rute fra A til B indeholde et lige antal skridt. En rute gennem alle gitterpunkter indeholder $(n+1)^2 - 1$ skridt, men $(n+1)^2 - 1$ er ulige når n er ulige, og det er dermed umuligt at gå gennem alle gitterpunkter når n er ulige. Man kan til gengæld konstruere en rute gennem alle på nær ét gitterpunkt på følgende måde: Start i A og gå som før n skridt op. Gå derefter et skridt til højre, n skridt ned, et skridt til højre, n skridt op og så videre, men stop efter at have taget samlet $n - 1$ skridt til højre. Tag herefter endnu et skridt til højre, et skridt op, et skridt til venstre, et skridt op, et skridt til højre, osv. Da n er ulige, vil denne rute ende i B efter et sidste skridt op, og derfor er det eneste gitterpunkt ruten ikke går igennem, gitterpunktet umiddelbart til venstre for B. På figuren er vist et eksempel med $n = 5$. Når n er ulige, er den maksimale længde af en rute dermed $(n+1)^2 - 2 = n^2 + 2n - 1$.