# Georg Mohr-Konkurrencen

## Løsninger · 2008

**Opgave 1.** *Danmark har spillet en fodboldlandskamp mod Georgien. Kampen sluttede* 5–5*, og mellem første og sidste mål har kampen på intet tidspunkt stået lige. Intet land har scoret tre mål i træk, og Danmark scorede det sjette mål. Kan man ud fra disse oplysninger afgøre hvilket land der scorede det femte mål?*

**Løsning.** Georgien scorede det femte mål. For at vise dette antager vi det modsatte og viser at dette er umuligt. Antag at Danmark scorede det femte mål. Da Danmark også scorede det sjette mål, og intet land har scoret tre mål i træk, må Georgien have scoret det fjerde mål. De tre første mål kan ikke være scoret af samme land da ingen har scoret tre mål i træk. Altså har enten Georgien eller Danmark scoret netop et af de tre første mål. Hvis Georgien scorede netop et af de tre første mål, stod det lige efter fjerde mål, hvilket er umuligt. Hvis Danmark scorede netop et af de tre første mål, stod det lige efter sjette mål, hvilket også er umuligt. Antagelsen om at Danmark har scoret det femte mål, er derfor forkert, og eneste mulighed er at Georgien har scoret det femte mål. (Mulige scoringsrækkefølger er DDGDGDGDGG og GGDGGDDGDD).

**Opgave 2.** *Om tre hele tal $p$, $q$ og $r$ gælder at $p + q^2 = r^2$. Vis at* 6 *går op i $pqr$.*

**Løsning.** Ligningen omformes til

$$p = r^2 - q^2 = (r + q)(r - q).$$

Et tal er deleligt med 6 netop hvis det er deleligt med både 2 og 3. For at vise at produktet $pqr$ er deleligt med 6, kan vi derfor i stedet vise at det er deleligt med både 2 og 3.

Produktet $pqr$ er deleligt med 2 hvis mindst et af tallene er lige. Hvis både $r$ og $q$ er ulige, bliver $r + q$ lige, og dermed vil også $p = (r + q)(r - q)$ være lige. Derfor er mindst et af tallene $p$, $q$ og $r$ lige, og $pqr$ er delelig med 2.

Produktet $pqr$ er deleligt med 3 netop hvis mindst et af tallene $p$, $q$ og $r$ er deleligt med 3. Antag at hverken $q$ eller $r$ er delelige med 3. Når man dividerer dem med 3, har de dermed en rest på enten 1 eller 2. Hvis $q$ og $r$ har samme rest ved division med 3, er $r - q$ delelig med 3, og hvis de har forskellig rest ved division med 3, dvs. at den ene har rest 1 og den anden rest 2, da er $r + q$ delelig med 3. I begge tilfælde bliver $p = (r + q)(r - q)$ delelig med 3. Derfor må mindst et af tallene $p$, $q$ og $r$ være deleligt med 3, og dermed er produktet $pqr$ også deleligt med 3.

Samlet har vi vist at $pqr$ er delelig med både 2 og 3 og derfor også med 6.

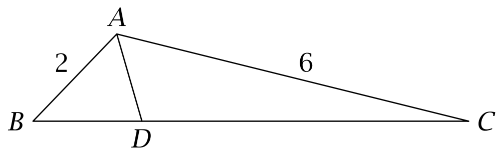
**Opgave 3.** *Tallene fra* 1 *til* 500 *er skrevet på tavlen. To spillere $A$ og $B$ sletter skiftevis ét tal ad gangen, og $A$ sletter det første tal. Hvis summen af de to sidste tal på tavlen er delelig med* 3*, vinder $B$, i modsat fald vinder $A$. Hvilken spiller kan lægge en strategi der sikrer denne spiller sejren?*

**Løsning.** Spiller $B$ har en strategi så $B$ vinder uanset hvordan $A$ spiller. De 500 tal kan opdeles i 250 par således at $n$ parres med $501 - n$ for $n = 1, 2, 3, \ldots, 250$. Med denne parring har hvert par summen 501, og hvert af de 500 tal indgår i netop et par. Hver gang spiller $A$ sletter et tal fra et par, sletter $B$ umiddelbart efter det andet tal i parret. Hver gang $A$ skal trække, har alle tal på tavlen derfor en makker på tavlen, og det er altså altid muligt for $B$ at følge denne strategi. Når der kun er to tal tilbage på tavlen, danner de derfor et par med sum 501 som er delelig med 3. Dermed vinder spiller $B$ ved at følge denne strategi.

**Opgave 4.** *I trekant $ABC$ er $|AB| = 2$, $|AC| = 6$ og $\angle A = 120°$. Vinkelhalveringslinjen for vinkel $A$ skærer siden $BC$ i punktet $D$. Bestem længden af $AD$. Svaret ønskes angivet som brøk med hele tal i tæller og nævner.*
**Løsning.** Sæt $d = |AD|$. Arealet af trekant $ABC$ er lig med summen af arealerne af trekant $ACD$ og trekant $ABD$. Dermed er

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bd\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}cd\sin\frac{A}{2}.$$

Da $\sin v = \sin(180° - v)$ og $\angle A = 120°$, er $\sin A = \sin\frac{A}{2}$. Da vi yderligere ved at $b = 6$ og $c = 2$, kan vi reducere ligningen til $6 \cdot 2 = 6d + 2d$, og dermed $d = \frac{3}{2}$.




**Opgave 5.** *For hvert positivt helt tal $n$ dannes ud fra tallene $2^n$ og $5^n$ et nyt tal $t_n$ som består af cifrene fra $2^n$ efterfulgt af cifrene fra $5^n$. Fx er $t_4 = 16625$. Hvor mange cifre har tallet $t_{2008}$?*
**Løsning.** Antallet af cifre i $2^{2008}$ og $5^{2008}$ betegnes henholdsvis $p$ og $q$. Vi ønsker altså at bestemme tallet $p + q$ da det er antallet af cifre i $t_{2008}$. Tallene $p$ og $q$ er bestemt ved dobbeltulighederne

$$10^{p-1} < 2^{2008} < 10^p \quad \text{og} \quad 10^{q-1} < 5^{2008} < 10^q,$$

hvor første ulighedstegn i begge uligheder ikke kan være lighedstegn da hverken $2^{2008}$ eller $5^{2008}$ er en potens af 10. Ved at kombinere ulighederne fås

$$10^{p-1} \cdot 10^{q-1} < 2^{2008} \cdot 5^{2008} < 10^p \cdot 10^q$$

og videre

$$10^{p+q-2} < 10^{2008} < 10^{p+q}.$$

Af denne dobbeltulighed fremgår dels at $p + q < 2010$ (fordi $p + q - 2 < 2008$), dels $2008 < p + q$. Altså er $p + q = 2009$. Antallet af cifre i tallet $t_{2008}$ er således 2009.