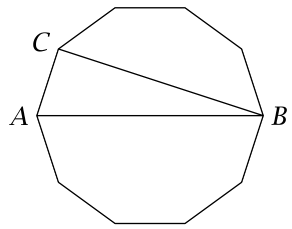
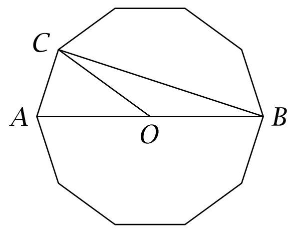
Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 2007

Opgave 1. *I en regulær tikant ligger trekant ABC som vist på figuren. Hvor stor en brøkdel udgør trekantens areal af hele tikantens areal? Svaret ønskes opskrevet som en brøk hvor tæller og nævner er hele tal.*



Løsning. Lad O være tikantens midtpunkt. Punktet O er midtpunktet af AB, og ved at forbinde O med tikantens hjørner opdeles tikanten i ti kongruente trekanter. Dermed udgør arealet af trekant AOC en tiendedel af tikantens areal. Trekant ABC har dobbelt så stort areal som trekant AOC da grundlinjen AB i trekant ABC er dobbelt så lang som grundlinjen AO i trekant AOC, mens højden fra C er den samme. Trekant ABC udgør altså $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ af tikantens areal.

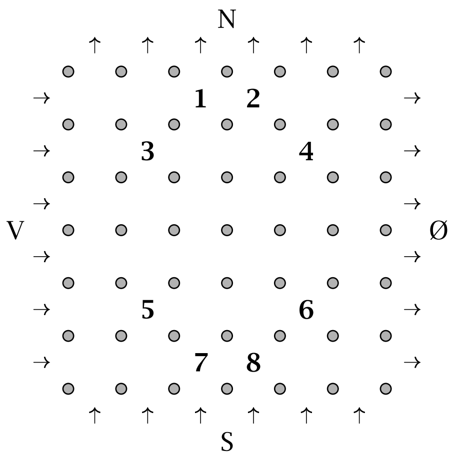


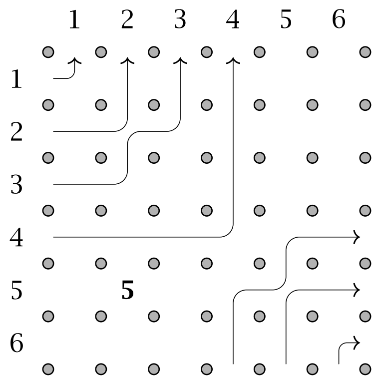
Opgave 2. *Hvad er det sidste ciffer i tallet* 2007^{2007}*?*
Løsning. Sidste ciffer i et produkt afhænger kun af sidste ciffer i de to faktorer. Dette ses ved at skrive faktorerne $10a + b$ og $10c + d$. Produktet af disse to faktorer er

$$\begin{aligned}(10a+b)(10c+d) &= 100ac + 10ad + 10bc + bd \\ &= 10(10ac + ad + bc) + bd,\end{aligned}$$

hvilket viser at sidste ciffer i produktet af $10a + b$ og $10c + d$ er identisk med sidste ciffer i bd. Sidste ciffer i 2007^2 er derfor identisk med sidste ciffer i $7^2 = 49$, dvs. 9. Sidste ciffer i $2007^3 = 2007 \cdot 2007^2$ er identisk med sidste ciffer i $7 \cdot 9 = 63$, dvs. 3. Sidste ciffer i $2007^4 = (2007^2)^2$ er identisk med sidste ciffer i $9^2 = 81$, dvs. 1. Sidste ciffer i $2007^{2007} = (2007^4)^{501} \cdot 2007^3$ er derfor identisk med sidste ciffer i $1^{501} \cdot 3$, dvs. 3.

Opgave 3. *En snedig drage bevogter en prinsesse. For at overvinde dragen og vinde prinsessen skal man løse følgende opgave: Dragen har i nogle af felterne i søjlehallen (se figur) anbragt tallene* 1–8*. Selv må man i resten af felterne anbringe tallene* 9–36*. Tallene* 1–36 *skal stå således at* enhver *tur der starter med at man går ind fra enten syd eller vest, og ender med at man går ud mod enten nord eller øst, går gennem mindst ét tal fra* 5*-tabellen. (På figuren er nord, syd, øst og vest angivet med* N, S, Ø *og* V*). Georg ønsker at vinde prinsessen. Kan det lade sig gøre?*

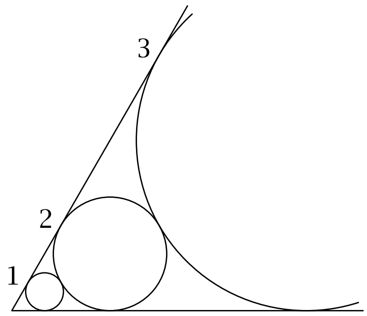




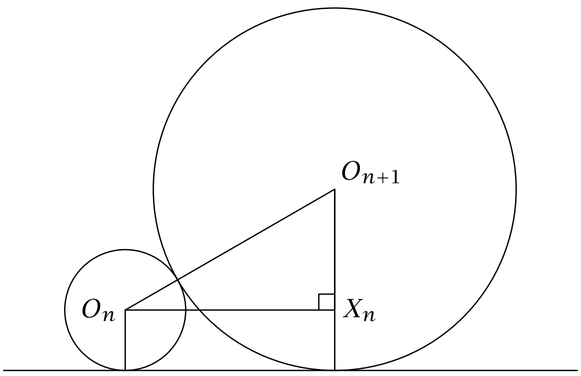
Løsning. Rækkerne af felter i søjlehallen nummereres $1, 2, 3, 4, 5, 6$ fra nord mod syd, og søjlerne af felter nummereres tilsvarende fra vest mod øst. Feltet i række n og søjle m betegnes (n, m). Blandt tallene 1–36 er der netop syv tal fra femtabellen, hvor det ene allerede er placeret af dragen i feltet $(5, 2)$. Hvis Georg skal vinde prinsessen, skal han placere de resterende seks tal i femtabellen således at hver eneste rute gennem søjlehallen indeholder mindst et af de syv tal fra femtabellen. Betragt først (se figur) følgende tre nordvestlige ruter $(1, 1)$, $(2, 1) \to (2, 2) \to (1, 2)$ og $(3, 1) \to (3, 2) \to (2, 2) \to (2, 3) \to (1, 3)$. Da eneste overlappende felt mellem disse tre ruter er $(2, 2)$, som allerede er optaget af et tal der ikke tilhører femtabellen, skal Georg benytte mindst tre tal fra femtabellen for at klare kravet vedrørende disse tre ruter. Han skal ligeledes bruge yderligere tre tal fra femtabellen hvis han vil klare de tilsvarende tre sydøstlige ruter.

Hvis han også skal klare ruten der starter i $(4, 1)$, forsætter mod øst til $(4, 4)$ og derfra går mod nord og ud gennem $(1, 4)$, kræver det yderligere at et tal fra femtabellen placeres på denne rute da den ikke har nogen felter tilfælles med de seks andre nævnte ruter. For at klare de nævnte syv ruter skal Georg altså bruge mindst syv tal fra femtabellen, men han har kun seks til rådighed, og det syvende, der er sat af dragen, klarer ingen af de nævnte ruter. Derfor er det umuligt for Georg at placere tallene så alle ruter gennem søjlehallen indeholder et tal fra femtabellen, og Georg kan derfor ikke vinde prinsessen.

Opgave 4. *Figuren viser en vinkel på* $60°$*, hvori der ligger* 2007 *nummererede cirkler (kun de tre første er vist på figuren). Cirklerne er nummererede efter størrelse. Cirklerne tangerer vinklens ben og hinanden som vist på figuren. Cirkel nummer* 1 *har radius* 1*. Bestem radius af cirkel nummer* 2007*.*



Løsning. Toppunktet i vinklen på $60°$ betegnes O, og centrum og radius i cirkel nummer n betegnes henholdsvis O_n og r_n. Linjen gennem alle centrene halverer vinklen og danner dermed en vinkel på $30°$ med hvert vinkelben. For at finde sammenhængen mellem r_n og r_{n+1} konstrueres en retvinklet trekant hvor to af siderne kan udtrykkes ved r_n og r_{n+1}:



Lad X_n være et punkt på linjen gennem O_n parallel med det ene vinkelben således at vinkel $\angle O_n X_n O_{n+1}$ er ret. Da $O_n X_n$ er parallel med det ene vinkelben, er $\angle X_n O_n O_{n+1} = 30°$, og ifølge formlen for sinus i en retvinklet trekant er

$$\frac{|X_n O_{n+1}|}{|O_n O_{n+1}|} = \sin(\angle X_n O_n O_{n+1}) = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

Da $O_{n+1}X_n$ står vinkelret på det ene vinkelben, $O_n X_n$ er parallel med det, og afstanden fra henholdsvis O_n og O_{n+1} til vinkelbenet er r_n og r_{n+1}, er $|X_n O_{n+1}| = r_{n+1} - r_n$. Desuden er $|O_n O_{n+1}| = r_n + r_{n+1}$ da de to cirkler tangerer hinanden. Samlet ses at

$$\frac{r_{n+1} - r_n}{r_n + r_{n+1}} = \frac{|X_n O_{n+1}|}{|O_n O_{n+1}|} = \frac{1}{2}.$$

Heraf fås $2r_{n+1} - 2r_n = r_n + r_{n+1}$, og ved at isolere r_{n+1} fås $r_{n+1} = 3r_n$. Radius i cirkel nummer $n+1$ er altså tre gange så stor som radius i cirkel nummer n, og dermed er $r_{2007} = 3^{2006} \cdot r_1 = 3^{2006}$.

Opgave 5. *Tallene* $a_0, a_1, a_2, \dots$ *er bestemt ved at* $a_0 = 0$*, og*

$$a_n = \begin{cases} 1 + a_{n-1} & \text{når } n \text{ er positiv og ulige,} \\ 3a_{n/2} & \text{når } n \text{ er positiv og lige.} \end{cases}$$

Hvor mange af disse tal er mindre end 2007*?*

Løsning. Først vises at følgen er voksende, dvs. at $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$, ved at vise at det modsatte er umuligt. Antag nemlig at følgen ikke er voksende, dvs. at der findes et n så $a_n \leq a_{n-1}$, og lad M være det mindste sådanne n. For ulige n gælder klart $a_n > a_{n-1}$ ifølge definitionen af a_n, så tallet M må være lige. Vi skriver $M = 2k$ og bemærker at $a_M = 3a_k$, $a_{M-1} = 1 + a_{M-2}$ og $a_{M-2} = 3a_{k-1}$. Da M var det mindste tal n med egenskaben $a_n \leq a_{n-1}$, og da k er mindre end M, gælder $a_k > a_{k-1}$. Da a_k og a_{k-1} er hele tal, følger at $a_k \geq 1 + a_{k-1}$. Heraf fås videre $3a_k \geq 3 + 3a_{k-1}$ og

$$a_M = 3a_k \geq 3 + 3a_{k-1} = 3 + a_{M-2} = 2 + 1 + a_{M-2} = 2 + a_{M-1} > a_{M-1},$$

hvilket er i modstrid med $a_M \leq a_{M-1}$. Dermed er antagelsen om at der findes et n så $a_n \leq a_{n-1}$, forkert, og vi har derfor vist at følgen er voksende.

Antallet af tal a_n som er mindre end 2007, kan nu tælles ved at finde det største tal m for hvilket $a_m < 2007$, for da er $a_0, a_1, \dots, a_m$ mindre end 2007, mens $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$ er større. For $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ er $a_n = 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187$ hvor det sidste tal er større end 2007, dvs. at $m < 128$. Tallet a_{127} beregnes:

$$\begin{aligned} a_{127} &= a_{126} + 1 = 3a_{63} + 1 = 3a_{62} + 4 = 9a_{31} + 4 \\ &= 9a_{30} + 13 = 27a_{15} + 13 = 27a_{14} + 40 = 81a_7 + 40 \\ &= 81a_6 + 121 = 243a_3 + 121 = 243a_2 + 364 = 729a_1 + 364 = 1093. \end{aligned}$$

Da dette tal er mindre end 2007, er $m = 127$, dvs. at $a_0, a_1, \dots, a_{127}$ er mindre end 2007 mens resten er større, og dermed er antallet af a_n mindre end 2007 lig med 128.