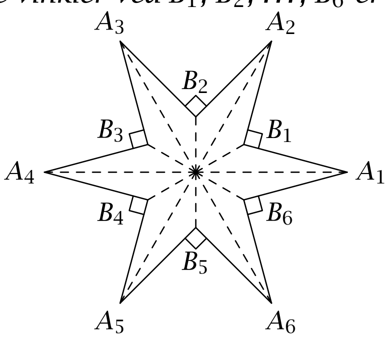
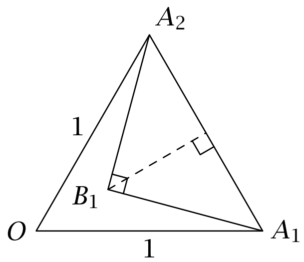
Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 2006

Opgave 1. *Den viste stjerne er symmetrisk om hver af de seks viste diagonaler. Alle forbindelseslinjer fra punkterne $A_1, A_2, \dots, A_6$ til stjernens centrum har længden 1, og alle de viste vinkler ved $B_1, B_2, \dots, B_6$ er rette. Bestem stjernens areal.*





Løsning. Stjernens areal er lig med arealet af sekskanten $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ minus arealet af de seks trekanter $A_1B_1A_2, A_2B_2A_3, \dots, A_6B_6A_1$. Kald stjernens centrum for O. Sekskanten $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ består af seks trekanter $OA_1A_2, OA_2A_3, \dots, OA_6A_1$ som alle er ligesidede med sidelængde 1 da vinklen ved centrum O er $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, og denne vinkels to hosliggende sider har længde 1. Højden h i en ligesidet trekant med sidelængde 1 kan beregnes ved Pythagoras' sætning:

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Arealet af sekskanten $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ er derfor $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. De seks trekanter $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, …, $A_6B_6A_1$ er ligebenede og retvinklede med hypotenuse 1. Højden på hypotenusen har derfor længden $\frac{1}{2}$. Det samlede areal af disse seks trekanter er dermed $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Arealet af stjernen er dermed $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$.

Opgave 2. *Bestem alle reelle talsæt (x, y, z) som opfylder*

$$x + y = 2 \quad \textit{og}$$
$$xy - z^2 = 1.$$

Løsning. Antag at (x, y, z) er en løsning til ligningssystemet. Af første ligning følger at $y = 2 - x$, og dette kombineret med anden ligning giver

$$z^2 = xy - 1 = x(2 - x) - 1 = 2x - x^2 - 1 = -(x - 1)^2.$$

Da z^2 er ikke-negativ, og $-(x - 1)^2$ er ikke-positiv, er eneste mulighed at begge er 0, dvs. at $z = 0$, $x = 1$ og yderligere $y = 2 - x = 1$. Hvis der findes en løsning, må den derfor være $(x, y, z) = (1, 1, 0)$, og ved indsættelse i begge ligninger ses at dette faktisk er en løsning.

Opgave 3. *Et naturligt tal n, som højst er 500, har den egenskab at når man vælger et tal m tilfældigt blandt tallene $1, 2, 3, \dots, 499, 500$, så er sandsynligheden $\frac{1}{100}$ for at m går op i n. Bestem den størst mulige værdi af n.*

Løsning. Når sandsynligheden er $\frac{1}{100}$ for at et tilfældigt tal blandt tallene $1, 2, 3, \dots, 500$ går op i det hele positive tal n, og n højst er 500, betyder det at n har netop fem positive divisorer inklusive tallene 1 og n. Lad $1, p, q, r, n$ være de fem divisorer i n således at $1 < p < q < r < n$. Da p er den mindste divisor i n som er større end 1, må p være et primtal. Tallene $\frac{n}{p}$, $\frac{n}{q}$ og $\frac{n}{r}$ er også divisorer i n med

$$1 < \frac{n}{r} < \frac{n}{q} < \frac{n}{p} < n,$$

så vi må have at $n = pr = q^2$. Af dette ses at primtallet p er divisor i q^2 og dermed også i q, og da der ikke er andre divisorer i n end p som er mindre end q, må $q = p^2$ og $n = q^2 = p^4$. Vi leder altså efter det største tal blandt tallene $1, 2, 3, \dots, 500$ som er en fjerdepotens af et primtal. Da $3^4 = 81 < 500 < 625 = 5^4$, er $3^4 = 81$ den størst mulige værdi af n.

Opgave 4. *Af tallene $1, 2, 3, \dots, 2006$ skal udtages ti forskellige. Vis at man kan udtage ti forskellige tal med sum større end 10039 på flere måder, end man kan udtage ti forskellige tal med sum mindre end 10030.*

Løsning. Lad M betegne mængden $\{1, 2, 3, \dots, 2006\}$. Antag at tallene $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ er ti forskellige tal fra mængden M med sum mindre end 10030. Tallene $b_i = 2007 - a_i$, $i = 1, 2, \dots, 10$, er dermed også ti forskellige tal fra mængden M, og om deres sum S ved vi at

$$\begin{aligned} S &= b_1 + b_2 + \cdots + b_{10} \\ &= (2007 - a_1) + (2007 - a_2) + \cdots + (2007 - a_{10}) \\ &= 10 \cdot 2007 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) \\ &> 20070 - 10030 \\ &= 10040. \end{aligned}$$

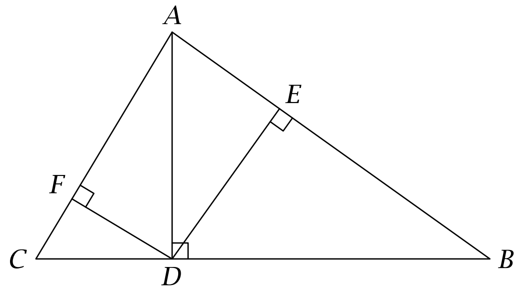
Da forskellige valg af $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ giver forskellige valg af $b_1, b_2, \dots, b_{10}$, er antallet af måder at vælge ti forskellige tal fra M med sum større end 10040 mindst lige så stort som antallet af måder at vælge ti forskellige tal fra M med sum mindre end 10030. Når summen er større end 10040, er den også større end 10039. Desuden har de ti tal 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1005, 1006, 1007, 1008, 1009 sum 10040, og derfor er antallet af måder at udvælge ti forskellige tal fra M med sum større end 10039 større end antallet af måder at vælge ti forskellige tal fra M med sum mindre end 10030.

Opgave 5. *Vi ser på en spidsvinklet trekant ABC. Højden fra A er AD, højden fra D i trekant ABD er DE, og højden fra D i trekant ACD er DF.*

(a) *Bevis at trekanterne ABC og AFE er ensvinklede.*

(b) *Bevis at linjestykket EF og de tilsvarende linjestykker dannet med udgangspunkt i hjørnerne B og C alle er lige lange.*

Løsning. Trekant ABD og trekant ADE er ensvinklede da de begge er retvinklede og desuden har vinklen ved A tilfælles. Ifølge formlen for sinus i en retvinklet trekant er $\frac{|AD|}{|AB|} = \sin B$ og $\frac{|AD|}{|AC|} = \sin C$. Trekanterne ADE og ABD er derfor ensvinklede med forholdet $\sin B$, og derfor er $|AE| = |AD| \sin B = |AC| \sin C \sin B$. Tilsvarende fås $|AF| = |AB| \sin B \sin C$. Da trekanterne AFE og ABC har vinkel A fælles, og $\frac{|AF|}{|AB|} = \sin B \sin C = \frac{|AE|}{|AC|}$ er trekanterne ensvinklede med forholdet $\sin B \sin C$.



Nu udnytter vi at trekanterne AFE og ABC er ensvinklede med forholdet $\sin B \sin C$, til at bestemme $|EF|$, og får

$$|EF| = |BC| \sin B \sin C = \frac{|BC|}{\sin A} \sin A \sin B \sin C.$$

Længden af de tilsvarende linjestykker dannet med udgangspunkt i hjørnerne B og C kan findes på samme måde, og de er dermed henholdsvis $\frac{|AC|}{\sin B} \sin A \sin B \sin C$ og $\frac{|AB|}{\sin C} \sin A \sin B \sin C$. Ifølge sinusrelationen er $\frac{|BC|}{\sin A} = \frac{|AC|}{\sin B} = \frac{|AB|}{\sin C}$. Altså er de tre linjestykker lige lange.