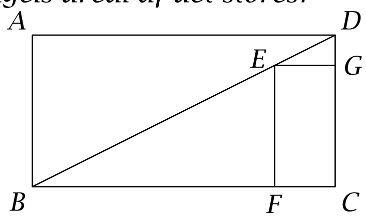
# Georg Mohr-Konkurrencen

## Løsninger · 2004

**Opgave 1.** *Rektanglet $ABCD$ er dobbelt så bredt som det er højt, og rektanglet $EFCG$ er dobbelt så højt som det er bredt. Punktet $E$ ligger på diagonalen $BD$. Hvor stor en brøkdel udgør det lille rektangels areal af det stores?*

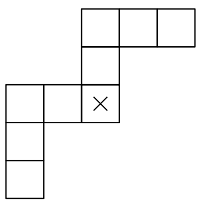



**Løsning.** Kald længden af linjestykket $DG$ for $x$. Trekanterne $EGD$ og $BCD$ er ensvinklede da siderne $BC$ og $EG$ er parallelle. Da $BC$ er dobbelt så lang som $CD$, må $EG$ også være dobbelt så lang som $GD$, altså $|EG| = 2x$. Yderligere er $GC$ dobbelt så lang som $EG$, altså $|GC| = 4x$. Det lille rektangel $EFCG$ har derfor sidelængderne $2x$ og $4x$, mens det store rektangel $ABCD$ har sidelængderne $|DC| = |DG| + |GC| = 5x$ og $|BC| = 2|DC| = 10x$. Arealet af det lille rektangel udgør dermed brøkdelen $\frac{2x \cdot 4x}{5x \cdot 10x} = \frac{4}{25}$ af arealet af det store rektangel.

**Opgave 2.** *Vis at hvis $a$ og $b$ er hele tal, og $a^2 + b^2 + 9ab$ er delelig med $11$, så er $a^2 - b^2$ delelig med $11$.*

**Løsning.** Antag at $a$ og $b$ er hele tal så $a^2+b^2+9ab$ er delelig med 11. Da $a^2+b^2+9ab = (a-b)^2 + 11ab$ er delelig med 11, og $11ab$ er delelig med 11, må også $(a-b)^2$ være delelig med 11. Da 11 er et primtal, går det også op i $a - b$, og dermed i $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

**Opgave 3.** *Cifrene fra $1$ til $9$ er placeret i figuren nedenfor med ét ciffer i hvert kvadrat. Summen af tre tal placeret i samme vandrette eller lodrette linje er $13$. Vis at der på den markerede plads står $4$.*



**Løsning.** Antag at cifrene fra 1 til 9 er placeret så de fire summer giver 13. Tre af cifrene indgår både i en række og en søjle, dvs. i to summer, og disse tre cifre kaldes for $a$, $b$ og $c$. En sammentælling af alle fire summer giver $4 \cdot 13 = 1 + 2 + \cdots + 9 + a + b + c$, altså $52 = 45 + a + b + c$, og dermed $a + b + c = 7$. Den eneste mulighed for at vælge tre forskellige cifre med sum 7 er cifrene 1, 2 og 4, og dermed er $a$, $b$ og $c$ lig med 1, 2 og 4. Hvis enten 1 eller 2 er placeret på den markerede plads, vil de to cifre 1 og 2 optræde i samme række eller samme søjle, men de skal sammen med et andet ciffer give summen 13, hvilket er umuligt. Dermed må der stå 4 i det markerede felt.

**Opgave 4.** *Find alle sæt* $(x, y, z)$ *af reelle tal som opfylder*

$$x^3 - y^2 = z^2 - x$$
$$y^3 - z^2 = x^2 - y$$
$$z^3 - x^2 = y^2 - z.$$

**Løsning.** En omskrivning af den første ligning $x^3 + x = y^2 + z^2 \geq 0$ viser at $x \geq 0$, og hvis $x = 0$, da er også $y = z = 0$. De to øvrige ligninger giver tilsvarende resultater for $y$ og $z$. Dermed er $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ en løsning, og for øvrige løsninger gælder at $x$, $y$ og $z$ er positive. Antag derfor at $x, y, z > 0$. Ved at lægge de tre ligninger sammen fås

$$(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2 + y^2 + z^2) = (x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z),$$

som omskrives til

$$(x^3 - 2x^2 + x) + (y^3 - 2y^2 + y) + (z^3 - 2z^2 + z) = 0$$

og videre til

$$x(x - 1)^2 + y(y - 1)^2 + z(z - 1)^2 = 0.$$

Alle led på venstresiden må derfor være 0 da de ikke er negative, og dette er kun muligt når $x = y = z = 1$. Det ses ved indsættelse at $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ faktisk også løser ligningssystemet. Dermed er de eneste løsninger $(0, 0, 0)$ og $(1, 1, 1)$.

**Opgave 5.** *Bestem for hvilke naturlige tal $n$ man kan dække et $2n \times 2n$-skakbræt med ikke-overlappende* L*-brikker. En* L*-brik dækker fire felter og har udseende som bogstavet* L*. Brikken må roteres og spejles efter behag.*

**Løsning.** Man kan let dække skakbrættet med L-brikker når $n$ er lige. To L-brikker kan nemlig dække et $4 \times 2$-rektangel, og skakbrættet kan dækkes af disse rektangler når $n$ er lige. Nu viser vi omvendt at hvis brættet er dækket af L-brikker, da må $n$ være lige, hvilket viser at det ikke kan lade sig gøre når $n$ er ulige. Antag derfor at vi har et $2n \times 2n$-skakbræt som er dækket af L-brikker. Da brættet består af $4n^2$ felter, og da hver L-brik dækker fire felter, må brættet være dækket af $n^2$ brikker. Hver anden række af felter på skakbrættet males røde og hver anden grønne, og en L-brik dækker med denne farvning enten et rødt felt og tre grønne eller tre røde felter og et grønt. Da der er lige mange røde og grønne felter på brættet, må der være lige så mange L-brikker der dækker et rødt felt og tre grønne, som der er L-brikker der dækker tre røde felter og et grønt. Dermed er der et lige antal brikker, og $n^2$ og dermed også $n$ er derfor lige. Det er altså kun muligt at dække brættet med L-brikker når $n$ er lige.