Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 2003

Opgave 1. *I en retvinklet trekant er summen $a + b$ af kateternes længder 24, mens højden h_c på hypotenusen c har længden 7. Bestem hypotenusens længde.*
Løsning. Arealet T af trekanten kan udregnes på to måder: $T = \frac{1}{2}ab$ og $T = \frac{1}{2}h_c c$. Dette viser at $ab = h_c c = 7c$, og Pythagoras' sætning giver yderligere at $a^2 + b^2 = c^2$. Samlet er

$$24^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 14c.$$

Dermed er c en positiv løsning til andengradsligningen $c^2 + 14c - 576 = 0$, og ved brug af løsningsformlen fås

$$c = \frac{-14 + \sqrt{14^2 + 4 \cdot 576}}{2} = -7 + \sqrt{7^2 + 576} = -7 + \sqrt{625} = 18.$$

Opgave 2. *Løs inden for de reelle tal ligningen*

$$x^5 + \lfloor x \rfloor = 20,$$

hvor $\lfloor x \rfloor$ betegner det største hele tal mindre end eller lig x.
Løsning. Funktionen $f(x) = x^5 + \lfloor x \rfloor$ er voksende da x^5 er voksende, og $\lfloor x_1 \rfloor \leq \lfloor x_2 \rfloor$ for alle x_1 og x_2 hvor $x_1 \leq x_2$. Dermed har ligningen $x^5 + \lfloor x \rfloor = 20$ højst en løsning. Da $f(1) = 1^5 + 1 = 2$ og $f(2) = 2^5 + 2 = 34$, må en mulig løsning ligge i intervallet $]1; 2[$. For $x \in]1; 2[$ er $\lfloor x \rfloor = 1$, altså reduceres ligningen i dette interval til $x^5 = 19$ som har løsningen $x = \sqrt[5]{19}$. Da $1^5 < 19 < 2^5$, må $\sqrt[5]{19} \in]1; 2[$, og dermed er $x = \sqrt[5]{19}$ også løsning til den oprindelige ligning.

Opgave 3. *Bestem de hele tal n hvor*

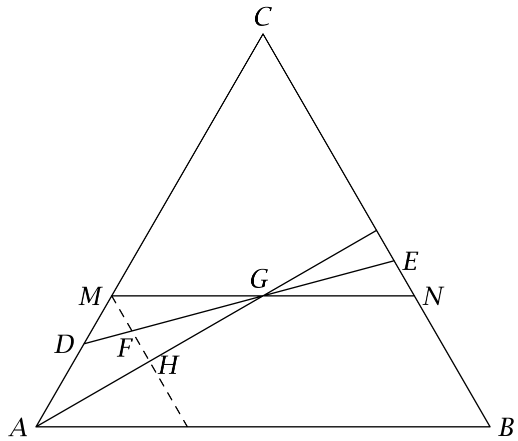
$$|2n^2 + 9n + 4|$$

er et primtal.
Løsning. Tallet $|2n^2 + 9n + 4|$ kan faktoriseres $|2n^2 + 9n + 4| = |2n + 1||n + 4|$, og dermed kan $|2n^2 + 9n + 4|$ kun være et primtal hvis den ene af faktorerne er 1, altså hvis enten $|2n + 1| = 1$ eller $|n + 4| = 1$. Dette er tilfældet netop når $n = 0$, $n = -1$, $n = -3$ eller $n = -5$. Ved indsættelse ses at udtrykket kun er et primtal når $n = -1$ og $n = -3$.

Opgave 4. *Georg og hans mor elsker pizza. De køber en pizza som er formet som en ligesidet trekant. Georg kræver at få lov til at dele pizzaen ved et lige snit og dernæst vælge først. Moren accepterer modvilligt, idet hun dog vil pege på et punkt i pizzaen som snittet skal passere. Bestem den største brøkdel af pizzaen som moren med denne procedure med sikkerhed kan få.*

Løsning. Georgs mor kan sikre sig mindst $\frac{4}{9}$ af pizzaen ved at pege på medianernes skæringspunkt G, og det viser vi ved at hun mindst får $\frac{4}{9}$ når hun peger på G, hvorimod Georg kan sørge for at hun får mindre end $\frac{4}{9}$ hvis hun peger på et andet punkt.

Antag først at Georgs mor peger på medianernes skæringspunkt G. Hvis Georg skærer parallelt med en af siderne gennem dette punkt, deler han pizzaen i et trapez og en ligesidet trekant hvis sidelængde er $\frac{2}{3}$ af pizzaens sidelængde da medianerne deler hinanden i forholdet 2 til 1. Arealet af det trekantede stykke udgør derfor $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ af hele pizzaen, altså får Georgs mor mindst $\frac{4}{9}$ af pizzaen. Hvis Georg skærer pizzaen i en linje som ikke er parallel med nogen af siderne, navngiver vi pizzaens hjørner A, B og C og snittets skæringspunkter med trekantens sider D og E således at D ligger på AC, E ligger på BC, og afstanden fra D til AB er mindre end afstanden fra E til AB. Linjen gennem G parallel med AB skærer AC i M og BC i N.



Lad T betegne areal. Vi ønsker at vise at

$$\frac{5}{9}T(\triangle ABC) = T(\square AMNB) > T(\square ADEB) \geq \frac{1}{2}T(\triangle ABC),$$

da dette viser at Georgs mor i dette tilfælde får mere end $\frac{4}{9}$ af pizzaen. Vi har allerede vist det første lighedstegn. Tegn en linje gennem M parallelt med linjen BC, og kald linjens skæringspunkt med DE for F, og linjens skæringspunkt med medianen fra A for H. Da er $\triangle MFG$ og $\triangle NEG$ kongruente da deres sider er parvis parallelle, og G er midtpunktet af MN, altså har de samme areal. Dermed er

$$T(\square AMNB) = T(\square ADEB) + T(\triangle DFM) > T(\square ADEB).$$

Tilsvarende er $T(\square AMNB) = \frac{1}{2}T(\triangle ABC) + T(\triangle AHM)$, og heraf fås at

$$\begin{aligned} T(\square ADEB) &= T(\square AMNB) - T(\triangle DMF) \\ &\geq T(\square AMNB) - T(\triangle AHM) \\ &= \frac{1}{2}T(\triangle ABC). \end{aligned}$$

Georgs mor får dermed mere end $\frac{4}{9}$ af pizzaen, når Georg skærer på denne måde.

Antag nu at Georgs mor peger på et punkt P forskelligt fra G. Vi navngiver nu trekantens hjørner A, B og C således at P ligger i det indre af trekant CNM, hvor N og M er defineret som før. Ved et snit gennem P parallelt med NM får moren mindre end $\frac{4}{9}$ af pizzaen.

Hermed har vi vist at $\frac{4}{9}$ er den største brøkdel af pizzaen som moren med sikkerhed kan sikre sig.

Opgave 5. *For hvilke naturlige tal $n \geq 2$ kan tallene fra 1 til 16 stilles op i et kvadratisk skema så de fire rækkesummer og de fire søjlesummer alle er indbyrdes forskellige og delelige med n?*

Løsning. Summen af de 16 tal er 136 så summen af de otte summer er 272. Antag at summerne i de fire rækker og fire søjler alle er forskellige og delelige med n. De otte mindste tal der er delelige med n, er $n, 2n, 3n, \ldots, 8n$. Altså er $272 \geq n + 2n + \cdots + 8n = 36n$, og derfor $n \leq \frac{272}{36} < 8$. Desuden går n op i $136 = 2^3 \cdot 17$, dvs. de eneste muligheder er $n = 2$ og $n = 4$. Begge disse muligheder kan bruges. I følgende skema er nemlig summen af cifrene i hver række og hver søjle både delelig med 2 og med 4, og de otte summer er desuden forskellige.

1	3	5	7
2	4	6	8
9	11	13	15
16	14	12	10