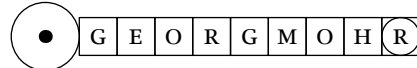


# Georg Mohr-Konkurrencen

## Løsninger · 2001

**Opgave 1.** Til GEORG MOHR-spillet bruges en spillebrik, en GEORG MOHR-terning (dvs. en terning, hvis seks sider viser bogstaverne G, E, O, R, M og H) samt en spilleplade:



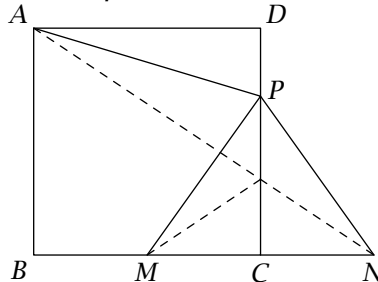
Ved hvert slag rykker man frem til førstkommande felt med det bogstav terningen viser; hvis det ikke er muligt at rykke frem, bliver man stående. Peter spiller GEORG MOHR-spillet. Bestem sandsynligheden for at han gennemfører spillet i to slag.

**Løsning.** Peter gennemfører spillet i præcis to slag netop hvis sidste kast er et R, og han i første kast kommer til det første R på spillepladen eller længere, altså hvis han slår R, M eller H i første kast. Sandsynligheden for at slå R, M eller H er  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ , og sandsynligheden for at slå R er  $\frac{1}{6}$ , dvs. sandsynligheden for at Peter gennemfører spillet i netop to slag, er  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ .

**Opgave 2.** Findes der et naturligt tal  $n$  så at tallet  $n!$  har præcis 11 nuller til slut? (Med  $n!$  betegnes tallet  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ ).

**Løsning.** Antallet af slutnuller i  $n!$  afhænger af hvor mange gange 10 går op i  $n!$ , dvs. det afhænger af eksponenten af 2 og eksponenten af 5 i primfaktoropløsningen af  $n!$ . Tallet  $5!$  er det mindste tal af formen  $n!$  der ender med et nul, og det har primfaktoropløsningen  $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ . Antallet af slutnuller svarer altså til den mindste af eksponenterne af henholdsvis 2 og 5 i primfaktoropløsningen af  $n!$ . Primfaktoropløsningen af  $16!$  er  $2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ , dvs. at eksponenten af 2 allerede her er større end 11, og da eksponenterne af 2 og 5 i primfaktoropløsningen af  $n!$  kun bliver større når  $n$  vokser, findes der et  $n$  så  $n!$  slutter på præcis 11 nuller, netop hvis vi kan finde et  $n$  så eksponenten af 5 i primfaktoropløsningen af  $n!$  er 11. Tallet  $49!$  ender på 10 nuller da 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45 hver bidrager med et 5-tal, og  $25 = 5^2$  bidrager med to 5-taller til primfaktoropløsningen af  $49!$ . Tallet  $50!$  ender derimod på 12 nuller da  $50 = 2 \cdot 5^2$  bidrager med yderligere to 5-taller til primfaktoropløsningen. Der findes derfor ikke et  $n$  så  $n!$  ender på netop 11 nuller.

**Opgave 3.** I kvadratet ABCD med sidelængde 2 er M midtpunkt af BC og P et punkt på DC. Bestem den mindste værdi af  $|AP| + |PM|$ .



**Løsning.** Punktet  $M$  spejles i linjen  $CD$ , og spejlbilledet kaldes  $N$ . Dermed er  $|AP| + |PM|$  lig med længden  $|AP| + |PN|$  af den brudte linje fra  $A$  til  $N$  via  $P$ , og denne er kortest når  $P$  vælges på linjestykket  $AN$ . Med denne placering af  $P$  giver Pythagoras' sætning at

$$|AP| + |PM| = |AN| = \sqrt{|AB|^2 + |BN|^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

**Opgave 4.** Vis at ethvert tal af formen

$$4444 \dots 44 - 88 \dots 8,$$

hvor der er dobbelt så mange 4-taller som 8-taller, er et kvadrattal.

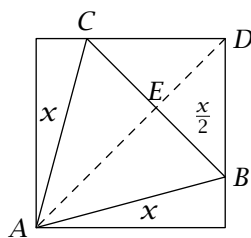
**Løsning.** Tallet  $10^k - 1$  består af  $k$  9-taller. Tallet vi betragter, kan derfor skrives som

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9} - 8 \cdot \frac{10^n - 1}{9} &= \frac{4}{9} (10^{2n} - 1 - 2 \cdot 10^n + 2) \\ &= \frac{4}{9} (10^n - 1)^2 \\ &= \left(2 \cdot \frac{10^n - 1}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Tallet i parenteser er et heltal da  $10^n - 1$  er delelig med 3. Hermed er det ønskede vist.

**Opgave 5.** Kan der i et kvadrat placeres en ligesidet trekant hvis areal udgør mere end  $\frac{9}{20}$  af kvadratets areal?

**Løsning.** Svaret er ja. Antag at kvadratets sidelængde er 1, og indlæg en ligesidet trekant  $ABC$  med sidelængde  $x$  som vist på figuren, således at der er symmetri om linjen  $AD$ .



Diagonalen i kvadratet har længde  $\sqrt{2}$  ifølge Pythagoras. Kald skæringspunktet mellem  $BC$  og  $AD$  for  $E$ . Trekant  $DEB$  er ligebeinet da  $\angle BED$  er ret, og  $\angle EDB = 45^\circ$ . Dermed er  $\frac{x}{2} = |BE| = |DE|$ , og  $|AE| = |AD| - |DE| = \sqrt{2} - \frac{x}{2}$ . Pythagoras' sætning anvendt på trekant  $ABE$  giver nu  $x^2 = (\sqrt{2} - \frac{x}{2})^2 + (\frac{x}{2})^2$ , altså  $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x - 2 = 0$ . Den eneste positive løsning til denne andengradsligning er  $x = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ . Arealet af trekant  $ABC$  er derfor  $\frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot x = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \sqrt{12} - 3$ . Og dette areal er faktisk større end  $\frac{9}{20}$  da  $\sqrt{12} > 3 + \frac{9}{20} = \frac{69}{20}$  hvilket følger af at  $12 \cdot 20^2 = 4800$  er større end  $69^2 = 4761$ .