Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 2001

Opgave 1. *Til* GEORG MOHR*-spillet bruges en spillebrik, en* GEORG MOHR*-terning (dvs. en terning, hvis seks sider viser bogstaverne* G, E, O, R, M *og* H*) samt en spilleplade:*

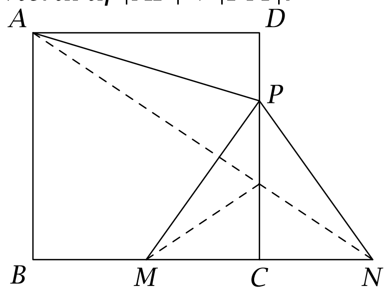
Ved hvert slag rykker man frem til førstkommende felt med det bogstav terningen viser; hvis det ikke er muligt at rykke frem, bliver man stående. Peter spiller GEORG MOHR*-spillet. Bestem sandsynligheden for at han gennemfører spillet i to slag.*

Løsning. Peter gennemfører spillet i præcis to slag netop hvis sidste kast er et R, og han i første kast kommer til det første R på spillepladen eller længere, altså hvis han slår R, M eller H i første kast. Sandsynligheden for at slå R, M eller H er $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, og sandsynligheden for at slå R er $\frac{1}{6}$, dvs. sandsynligheden for at Peter gennemfører spillet i netop to slag, er $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Opgave 2. *Findes der et naturligt tal n så at tallet $n!$ har præcis 11 nuller til slut? (Med $n!$ betegnes tallet $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$).*

Løsning. Antallet af slutnuller i $n!$ afhænger af hvor mange gange 10 går op i $n!$, dvs. det afhænger af eksponenten af 2 og eksponenten af 5 i primfaktoropløsningen af $n!$. Tallet 5! er det mindste tal af formen $n!$ der ender med et nul, og det har primfaktoropløsningen $2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Antallet af slutnuller svarer altså til den mindste af eksponenterne af henholdsvis 2 og 5 i primfaktoropløsningen af $n!$. Primfaktoropløsningen af 16! er $2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, dvs. at eksponenten af 2 allerede her er større end 11, og da eksponenterne af 2 og 5 i primfaktoropløsningen af $n!$ kun bliver større når n vokser, findes der et n så $n!$ slutter på præcis 11 nuller, netop hvis vi kan finde et n så eksponenten af 5 i primfaktoropløsningen af $n!$ er 11. Tallet 49! ender på 10 nuller da $5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45$ hver bidrager med et 5-tal, og $25 = 5^2$ bidrager med to 5-taller til primfaktoropløsningen af 49!. Tallet 50! ender derimod på 12 nuller da $50 = 2 \cdot 5^2$ bidrager med yderligere to 5-taller til primfaktoropløsningen. Der findes derfor ikke et n så $n!$ ender på netop 11 nuller.

Opgave 3. *I kvadratet $ABCD$ med sidelængde 2 er M midtpunkt af BC og P et punkt på DC. Bestem den mindste værdi af $|AP| + |PM|$.*



Løsning. Punktet M spejles i linjen CD, og spejlbilledet kaldes N. Dermed er $|AP| + |PM|$ lig med længden $|AP| + |PN|$ af den brudte linje fra A til N via P, og denne er kortest når P vælges på linjestykket AN. Med denne placering af P giver Pythagoras' sætning at

$$|AP| + |PM| = |AN| = \sqrt{|AB|^2 + |BN|^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Opgave 4. *Vis at ethvert tal af formen*

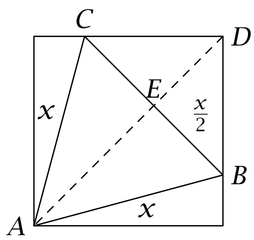
$$4444\ldots44 - 88\ldots8,$$

hvor der er dobbelt så mange 4*-taller som* 8*-taller, er et kvadrattal.*
Løsning. Tallet $10^k - 1$ består af k 9-taller. Tallet vi betragter, kan derfor skrives som

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9} - 8 \cdot \frac{10^n - 1}{9} &= \frac{4}{9}(10^{2n} - 1 - 2 \cdot 10^n + 2) \\ &= \frac{4}{9}(10^n - 1)^2 \\ &= (2 \cdot \frac{10^n - 1}{3})^2. \end{aligned}$$

Tallet i parentesen er et heltal da $10^n - 1$ er delelig med 3. Hermed er det ønskede vist.

Opgave 5. *Kan der i et kvadrat placeres en ligesidet trekant hvis areal udgør mere end $\frac{9}{20}$ af kvadratets areal?*
Løsning. Svaret er ja. Antag at kvadratets sidelængde er 1, og indlæg en ligesidet trekant ABC med sidelængde x som vist på figuren, således at der er symmetri om linjen AD.



Diagonalen i kvadratet har længde $\sqrt{2}$ ifølge Pythagoras. Kald skæringspunktet mellem BC og AD for E. Trekant DEB er ligebenet da $\angle BED$ er ret, og $\angle EDB = 45°$. Dermed er $\frac{x}{2} = |BE| = |DE|$, og $|AE| = |AD| - |DE| = \sqrt{2} - \frac{x}{2}$. Pythagoras' sætning anvendt på trekant ABE giver nu $x^2 = \left(\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$, altså $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x - 2 = 0$. Den eneste positive løsning til denne andengradsligning er $x = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Arealet af trekant ABC er derfor $\frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot x = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \sqrt{12} - 3$. Og dette areal er faktisk større end $\frac{9}{20}$ da $\sqrt{12} > 3 + \frac{9}{20} = \frac{69}{20}$ hvilket følger af at $12 \cdot 20^2 = 4800$ er større end $69^2 = 4761$.