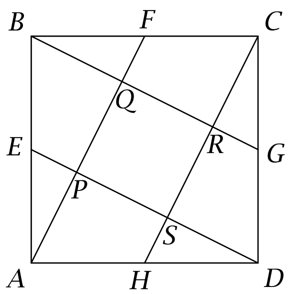
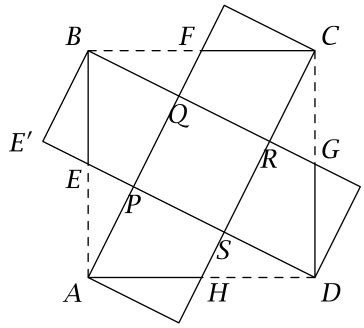
# Georg Mohr-Konkurrencen

## Løsninger · 2000

**Opgave 1.** *Firkant $ABCD$ er et kvadrat med sidelængden $1$, og punkterne $E$, $F$, $G$ og $H$ er sidernes midtpunkter. Bestem arealet af firkant $PQRS$.*

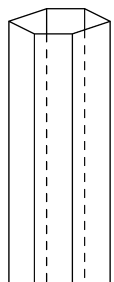


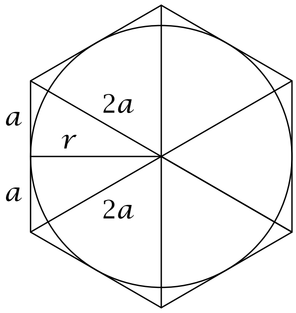

**Løsning.** Af symmetrigrunde er alle vinkler ved $P$, $Q$, $R$ og $S$ rette. Punktet $E'$ afsættes på forlængelsen af $DE$ således at $BE'$ er parallel med $AF$. Trekant $EBE'$ er da kongruent med trekant $EAP$ (trekanterne har samme vinkler da $BE'$ og $AP$ er parallelle, og $EB$ og $EA$ er lige lange). Da $EP$ er midtpunktstransversal i trekant $ABQ$, er $|PQ| = |AP|$. Af symmetrigrunde er $|BQ| = |AP|$. Altså er $|BQ| = |PQ|$. Firkant $PQBE'$ er derfor et kvadrat.

Ved nu at flytte de fire små trekanter som vist på figuren fremkommer en figur med samme areal som kvadratet $ABCD$. Den nye figur består af fem ens kvadrater. Følgelig har kvadratet $PQRS$ arealet $\frac{1}{5}$.

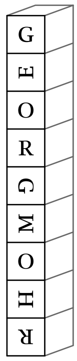
**Opgave 2.** *I et glas med lodrette rektangulære sideflader og med en regulær sekskant som bund og låg kan der lige netop anbringes tre ens kugler oven på hinanden, således at hver af kuglerne rører alle siderne i glasset. Glassets rumfang er $108\,\mathrm{cm}^3$. Hvad er sidelængden i grundfladen?*



**Løsning.** Kald sidelængden i sekskanten for $2a$. Så er (jf. figur) kuglens radius $r = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$ (Pythagoras). Glassets tværsnitsareal er da $6 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a\sqrt{3})$ og dets højde $3 \cdot 2 \cdot a\sqrt{3}$. Om rumfanget gælder så $6 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a\sqrt{3}) \cdot 3 \cdot 2 \cdot a\sqrt{3} = 108$, dvs. $108a^3 = 108$, hvoraf $a = 1$. Den søgte sidelængde er dermed $2\,\mathrm{cm}$.



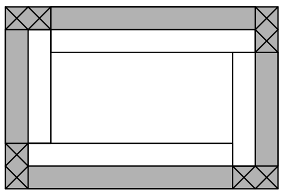

**Opgave 3.** *En* GEORG MOHR-*terning er en terning på hvis seks sideflader der er trykt henholdsvis* G, E, O, R, M *og* H. *Peter har ni helt ens* GEORG MOHR-*terninger. Kan det lade sig gøre at stable dem oven på hinanden til et tårn der på hver af de fire sider i en eller anden rækkefølge viser bogstaverne* G E O R G M O H R*?*




**Løsning.** Bemærk først at hvert bogstav har en bestemt »makker«, nemlig det bogstav der står på den modsatte side af terningen. Vi vil vise at svaret på opgaven er nej. Dette gøres indirekte. Antag at det kan lade sig gøre at bygge et tårn med den ønskede egenskab. Hvert af bogstaverne G, O og R forekommer da to gange på forsiden af tårnet. Dermed optræder deres makkere ligeledes hver to gange på bagsiden af tårnet. Altså må disse makkere være bogstaverne G, O og R. Men hvis fx G og O er hinandens makkere, er der ingen makker til R. Herved har vi nået en modstrid og dermed vist at det ikke kan lade sig sig gøre at bygge et tårn med de angivne egenskaber.

**Opgave 4.** *Et rektangulært gulv er dækket af et antal lige store kvadratiske fliser. Fliserne langs kanten er røde, og resten er hvide. Der er lige mange røde og hvide fliser. Hvor mange fliser kan der være?*

**Løsning.** Hver af de røde fliser langs kanten parres så vidt muligt med en hvid naboflise. Herved bliver der otte røde fliser tilovers (jf. figur). Altså må der også være otte hvide fliser tilovers. Disse inderste fliser udgør et rektangel, som så må have dimensionerne $1 \times 8$ eller $2 \times 4$ (eneste mulige faktoriseringer af tallet 8). Det samlede gulv er fire fliser bredere og fire fliser længere end dette inderrektangel og består dermed af enten $5 \cdot 12 = 60$ fliser eller $6 \cdot 8 = 48$ fliser.



**Opgave 5.** *Bestem samtlige mulige værdier af* $x + \frac{1}{x}$, *hvor det reelle tal* $x$ *tilfredsstiller ligningen*

$$x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0,$$

*og løs denne ligning.*

**Løsning.** Ved division med $x^2$ (tilladt da $x = 0$ tydeligvis ikke er en løsning) omskrives ligningen til $x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ og videre til $(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2) - 2 - 4 + 5(x + \frac{1}{x}) = 0$, dvs. $(x+\frac{1}{x})^2+5(x+\frac{1}{x})-6=0$. Dette er en andengradsligning i $x+\frac{1}{x}$, hvilket giver $x+\frac{1}{x}=-6$ eller $x+\frac{1}{x}=1$. Ved at gange den første af disse ligninger igennem med $x$ fås $x^2+6x+1=0$, som har diskriminant $36-4=32$ og løsninger $x=\frac{-6\pm\sqrt{32}}{2}=-3\pm2\sqrt{2}$. Den anden ligning giver tilsvarende $x^2-x+1=0$, som har diskriminant $1-4=-3$ og dermed ingen løsninger. Alt i alt fås at de mulige værdier af $x+\frac{1}{x}$ er $-6$, og at løsningerne til den oprindelige ligning er $-3\pm2\sqrt{2}$.