Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 1999

Opgave 1. *I et koordinatsystem er en cirkel med radius 7 og centrum på y-aksen anbragt inden i parablen med ligning $y = x^2$, således at den lige netop rører parablen i to punkter. Bestem koordinatsættet til cirklens centrum.*

Løsning. Ligningen for cirklen er $x^2 + (y - c)^2 = 49$, hvor $(0, c)$ er koordinatsættet for cirklens centrum. De givne oplysninger betyder at ligningssystemet

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ x^2 + (y - c)^2 &= 49 \end{aligned}$$

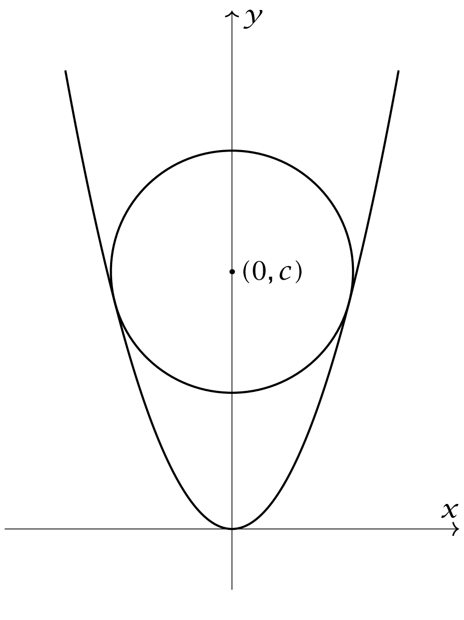
har netop to løsninger. Disse må være på formen $(\pm x, y)$, hvor $y > 0$. Ligningen $y + (y - c)^2 = 49$, der fremkommer ved indsættelse af $y = x^2$ i den nederste ligning, har derfor netop en løsning. Ligningen omskrives til

$$y^2 + (1 - 2c)y + c^2 - 49 = 0.$$

Denne andengradsligning i y har diskriminanten

$$(1 - 2c)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (c^2 - 49) = 1 + 4c^2 - 4c - 4c^2 + 196 = -4c + 197.$$

Da andengradsligningen har netop en løsning, er diskriminanten $-4c + 197 = 0$. Altså er $c = \frac{197}{4}$ og det søgte koordinatsæt dermed $(0, \frac{197}{4})$.



Opgave 2. *En fisker har fanget et antal fisk. De tre tungeste udgør tilsammen* 35 % *af fangstens samlede vægt. Dem sælger han. Herefter udgør de tre letteste tilsammen* 5/13 *af vægten af resten. Hvor mange fisk fangede han?*

Løsning. De tre letteste udgør $\frac{5}{13}$ af 65 %, dvs. 25 % af hele fangsten. De mellemste fisk udgør dermed $100\,\% - (35\,\% + 25\,\%) = 40\,\%$ af fangsten. I mellemgruppen må der følgelig være mindst fire fisk (da de tre tungeste kun vejer 35 % tilsammen). På den anden side kan der heller ikke være mere end fire fisk i mellemgruppen: Hver mellemfisk vejer jo nemlig mindst så meget som gennemsnittet af de tre letteste fisk, altså mindst $\frac{1}{3} \cdot 25\,\% = 8\frac{1}{3}\,\%$, og fem mellemfisk ville dermed tilsammen veje over 40 %. Altså er der præcis fire fisk i mellemgruppen, og dermed i alt $3 + 4 + 3 = 10$ fisk.

Opgave 3. *En funktion f opfylder*

$$f(x) + xf(1-x) = x$$

for alle reelle tal x. Bestem tallet $f(2)$. Bestem en forskrift for f.

Løsning. Ligningen $f(x) + xf(1-x) = x$ gælder for alle reelle tal x. Ved i denne ligning at erstatte x med $1-x$ og efterfølgende multiplicere med x fås ligningen

$$xf(1-x) + x(1-x)f(x) = x(1-x),$$

som ligeledes gælder for alle x. Subtraheres denne ligning fra den oprindelige, fås

$$f(x) - x(1-x)f(x) = x - x(1-x),$$

dvs. $(1 - x + x^2)f(x) = x^2$. Heraf finder vi forskriften

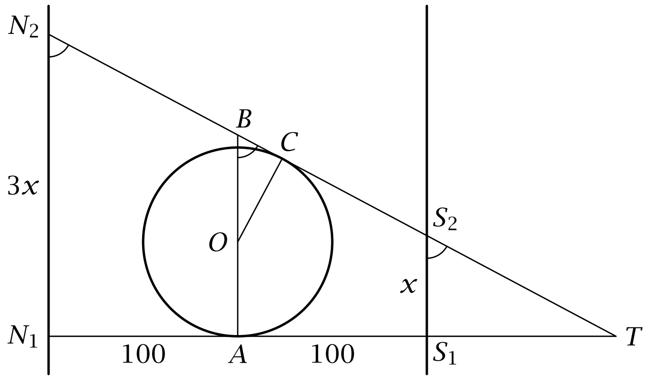
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x + 1},$$

som gælder for alle reelle tal x. Bemærk at diskriminanten $1 - 4 = -3$ for $x^2 - x + 1$ er negativ, så udtrykket i nævneren kan aldrig antage værdien 0. Ved indsættelse fås $f(2) = 4/3$.

Bemærkning. Uden brug af forskriften kunne funktionsværdien $f(2)$ bestemmes således: Indsæt henholdsvis $x = 2$ og $x = -1$ i den givne ligning. Herved fremkommer to ligninger med to ubekendte $f(2)$ og $f(-1)$. Ved løsning af ligningssystemet fås $f(2) = 4/3$.

Opgave 4. *Nanna og Sofie bevæger sig i samme retning ad to parallelle stier, der ligger i afstanden* 200 *meter fra hinanden. Nannas hastighed er* 3 *meter i sekundet, Sofies kun* 1 *meter i sekundet. En høj, cylindrisk bygning med en diameter på* 100 *meter er placeret midt mellem de to stier. Da bygningen første gang bryder sigtelinjen mellem pigerne, er deres indbyrdes afstand* 200 *meter. Hvor lang tid går der før de to piger igen kan se hinanden?*

Løsning. Når pigerne igen kan se hinanden, har Sofie bevæget sig x meter fra S_1 til S_2 og Nanna $3x$ meter fra N_1 til N_2 (se figur).



Linjen S_2N_2 tangerer tårnet i punktet C. Da trekanterne S_1TS_2 og N_1TN_2 er ensvinklede med sideforholdet $1:3$, er $|TS_1| = 100$. Da S_1TS_2 og ATB er ensvinklede med sideforholdet $1:2$, er $|AB| = 2x$. Videre er åbenbart trekant COB ensvinklet med trekant S_1TS_2 (da de deler en vinkel og begge er retvinklede) med sideforholdet $1:2$ (da $|OC| = 50$ og $|S_1T| = 100$). Heraf fås $|OB| = \frac{1}{2}|TS_2|$, og altså

$$2x - 50 = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 100^2}.$$

Ved kvadrering fås

$$4x^2 + 2500 - 200x = \frac{1}{4}(x^2 + 10000)$$

og videre $\frac{15}{4}x^2 = 200x$, hvoraf $x = \frac{160}{3}$. Sofie har altså bevæget sig $53\frac{1}{3}$ meter. Derfor er der gået $53\frac{1}{3}$ sekunder.

Opgave 5. *Findes der et tal hvis cifre er lutter* 1*-taller, og som* 1999 *går op i?*

Løsning. Svaret er ja. Betragtes mindst 2000 forskellige tal bestående af lutter 1-taller, vil der være to af disse der giver samme rest ved division med 1999 (da der jo højst kan forekomme 1999 forskellige rester ved division med 1999). Deres differens er derfor delelig med 1999. Denne differens vil være et tal der består af et antal 1-taller efterfulgt af et antal nuller, dvs. have formen $11\ldots1 \cdot 10^n$. Da 1999 ikke har fælles faktorer med 10^n, går 1999 op i det foranstillede tal $11\ldots1$. Hermed er påstanden vist.