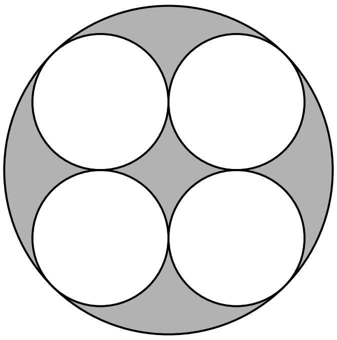
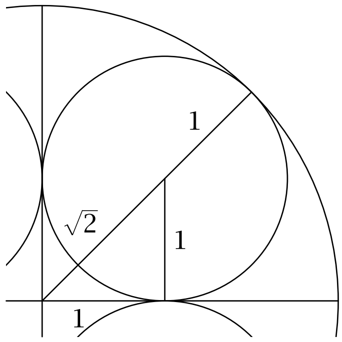
Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 1998

Opgave 1. *På den viste figur har de små cirkler radius* 1*. Beregn arealet af den grå del af figuren.*





Løsning. Radius i den store cirkel er åbenbart $1+\sqrt{2}$ (se figuren), idet $\sqrt{2}$ ifølge Pythagoras er længden af hypotenusen i en retvinklet trekant hvori begge kateter har længden 1. Det søgte areal er arealet af den store cirkel minus arealet af de fire små cirkler, dvs.

$$\begin{aligned}\pi\cdot(1+\sqrt{2})^2-4\cdot\pi\cdot 1^2 &= \pi(1+2+2\sqrt{2})-4\pi\\ &= (2\sqrt{2}-1)\pi.\end{aligned}$$

Opgave 2. *For ethvert reelt tal m har ligningen*

$$x^2+(m-2)x-(m+3)=0$$

to løsninger, som betegnes x_1 og x_2. Bestem m således at $x_1^2+x_2^2$ er mindst mulig.

Løsning. Da x_1 og x_2 er rødder i $x^2+(m-2)x-(m+3)$, er $x_1+x_2=-(m-2)$ og $x_1x_2=-(m+3)$, og dermed kan størrelsen

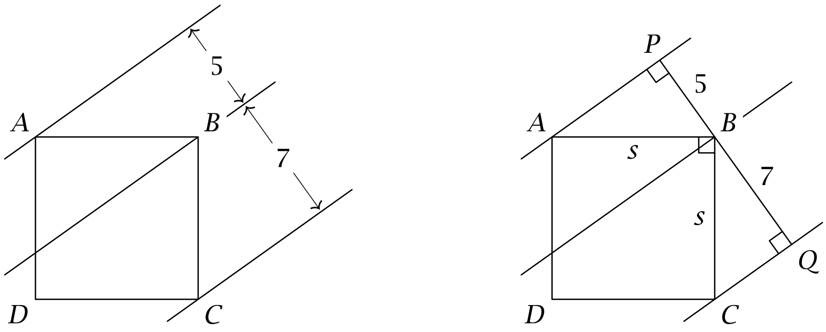
$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

udtrykkes ved koefficienterne i det givne andengradspolynomium:

$$x_1^2+x_2^2=(m-2)^2+2(m+3)=m^2-4m+4+2m+6=m^2-2m+10.$$

Dette udtryk er et andengradspolynomium i m. Det bliver mindst muligt når m er førstekoordinaten for toppunktet, dvs. for $m=\frac{2}{2}=1$.

Opgave 3. *På tre parallelle linjer med afstande som angivet på figuren ligger punkterne A, B og C således at firkant $ABCD$ er et kvadrat. Find arealet af dette kvadrat.*



Løsning. De to retvinklede trekanter ABP og BCQ (se figuren) er kongruente. De er nemlig ensvinklede (idet $\angle QBC + 90^\circ + \angle PBA = 180^\circ$), og de har begge kvadratets sidelængde s som hypotenuse. Altså er $|AP| = |BQ| = 7$. Med brug af Pythagoras findes det ønskede areal s^2 som $s^2 = 5^2 + 7^2 = 74$.

Opgave 4. *Lad a og b være positive reelle tal med $a + b = 1$. Vis at*

$$\Big(a + \frac{1}{a}\Big)^2 + \Big(b + \frac{1}{b}\Big)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Løsning. Bemærk først at $1 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, så $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$. Vi har nu at

$$\begin{aligned}(a + \tfrac{1}{a})^2 + (b + \tfrac{1}{b})^2 &= a^2 + \tfrac{1}{a^2} + 2 + b^2 + \tfrac{1}{b^2} + 2\\ &= a^2 + b^2 + \tfrac{b^2+a^2}{a^2b^2} + 4\\ &= (a^2 + b^2)(1 + \tfrac{1}{a^2b^2}) + 4\\ &= (1 - 2ab)(1 + \tfrac{1}{(ab)^2}) + 4.\end{aligned}$$

Begge faktorer er mindst mulige når ab er størst mulig. Da $ab = a(1-a) = a - a^2 \leq \frac{1}{4}$ (hvor den sidste ulighed følger af at $0 \leq (a - \frac{1}{2})^2$ eller ved brug af toppunktsformlen for parablen), er

$$(1 - 2ab)(1 + \tfrac{1}{(ab)^2}) + 4 \geq (1 - \tfrac{1}{2})(1 + \tfrac{1}{16}) + 4 = \tfrac{25}{2},$$

og heraf følger det ønskede.

Opgave 5. *En nydelig frugtanretning på et stort rundt fad er kantet med jordbær. Der er brugt mellem* 100 *og* 200 *bær til denne kant. Et lækkersultent barn spiser først et af jordbærrene og begynder derpå at gå rundt og rundt om fadet, idet hun spiser jordbær på følgende måde: Når hun har spist et bær, lader hun det næste ligge, derefter spiser hun det næste, lader det næste ligge, osv. Således fortsætter hun indtil der kun er et eneste jordbær tilbage. Dette bær er det der lå lige efter det allerførste hun spiste. Hvor mange bær lå der oprindelig?*

Løsning. Vi nummererer bærrene fra 0 til n (der var således oprindelig $n + 1$ bær) og noterer at bær nummer 0 spises, samt at bær nummer 1 overspringes hver gang. I første tur rundt om fadet må det sidste bær blive spist (for vi ved jo at det næste, nemlig bær nummer 1, ikke bliver spist). Altså må n være et lige tal. Efter første tur resterer $n/2$ bær. I anden runde må det sidste af de $n/2$ bær blive spist (fordi det næste, bær nummer 1, ikke bliver spist). Altså må $n/2$ være et lige tal. Efter anden tur resterer halvdelen af disse, dvs. $n/(2^2)$ bær. Således fortsættes. Efter den k'te tur resterer $n/(2^k)$ bær. Efter sidste tur er $n/(2^k) = 1$. Altså er n af formen 2^k. Da samtidig $100 \leq n + 1 \leq 200$, må det oprindelige antal bær være $n + 1 = 2^7 + 1 = 129$.