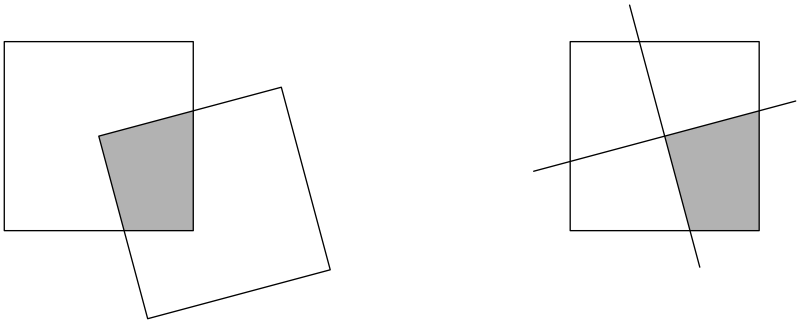
Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 1997

Opgave 1. *Lad* $n = 123456789101112\ldots998999$ *være det naturlige tal der fremkommer ved at skrive de naturlige tal fra* 1 *til* 999 *op efter hinanden. Hvad er ciffer nummer* 1997 *i* n*?*

Løsning. Ved optælling fra venstre ses at tallene fra 1 til 9 bidrager med 9 cifre, tallene fra 10 til 99 med $90 \cdot 2 = 180$ cifre, tallene fra 100 til 199 med $100 \cdot 3 = 300$ cifre, tallene 200 til 299 igen med 300 cifre osv. Da $1997 = 1800 + 197 = 6 \cdot 300 + 180 + 9 + 8$, fremkommer det 1997. ciffer otte pladser efter 699: $\ldots 69970070170\mathbf{0}2\ldots$. Det er altså et 0.

Opgave 2. *To kvadrater, begge med sidelængde* 1*, er anbragt således at det ene har en vinkelspids i det andets midtpunkt. Bestem arealet af det grå område.*



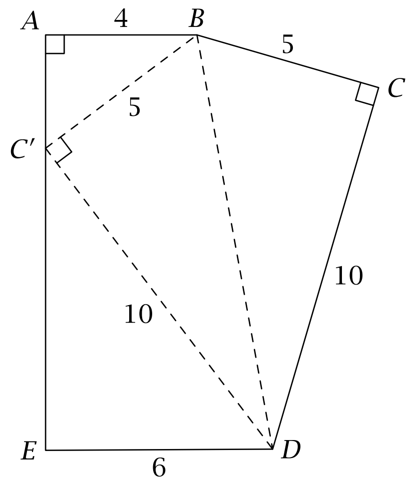
Løsning. Ved indtegning af de viste hjælpelinjer deles kvadratet i fire dele. Da de fire dele føres over i hinanden ved en drejning på 90° om kvadratets midtpunkt, er de kongruente og har dermed alle samme areal. Det søgte areal er derfor $\frac{1}{4}$.

Opgave 3. *Om femkant $ABCDE$ vides at vinkel A og vinkel C er rette, og at siderne $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|CD| = 10$, $|DE| = 6$. Endvidere gælder det at punktet C', der fremkommer ved spejling af C i linjen BD, ligger på linjestykket AE. Find vinkel E.*

Løsning. I den retvinklede trekant ABC' er $|AC'| = 3$ (benyt Pythagoras). Så er $\sin(\angle ABC') = \frac{3}{5}$. Da $\angle EC'D + \angle AC'B = 90°$ (se på vinklerne omkring C') og $\angle ABC' + \angle AC'B = 90°$ (udnyt vinkelsum i trekant ABC'), er $\angle EC'D = \angle ABC'$. Altså er $\sin(\angle EC'D) = \frac{3}{5}$. Sinusrelationen i trekant $EC'D$ siger nu at

$$\frac{\sin(\angle DEC')}{10} = \frac{\sin(\angle EC'D)}{6},$$

hvoraf $\sin(\angle DEC') = \frac{10}{6} \cdot \sin(\angle EC'D) = \frac{10}{6} \cdot \frac{3}{5} = 1$. Altså er $\angle E = 90°$.



Opgave 4. *Find alle par (x, y) af naturlige tal som tilfredsstiller ligningen*

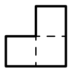
$$x^2 - xy + 2x - 3y = 1997.$$

Løsning. Da $xy + 3y = (x+3)y$ og $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, kan den givne ligning omskrives til $(x+3)(x-1) - (x+3)y = 1994$ og videre til

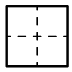
$$(x+3)(x-1-y) = 1994.$$

Tallet 1994 har primfaktorerne 2 og 997. De eneste mulige faktoriseringer af tallet 1994 er så $1994 \cdot 1$ og $997 \cdot 2$. Da $x + 3$ er den største af faktorerne, fås derfor enten $x + 3 = 1994$ og $x - 1 - y = 1$, eller $x + 3 = 997$ og $x - 1 - y = 2$. Heraf fås løsningssættene $(x, y) = (1991, 1989)$ og $(x, y) = (994, 991)$.

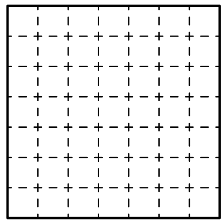
Opgave 5. *Et 7×7-kvadrat er skåret ud i brikker af følgende typer:*



type (a)



type (b)

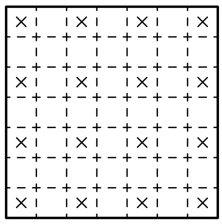


Vis at netop en af brikkerne er af type (b).

Løsning. Lad x og y betegne antallet af brikker af henholdsvis type (a) og type (b). Vi skal vise at $y = 1$. Brikkerne dækker i alt 49 felter, dvs.

$$3x + 4y = 49.$$

Da 49 ikke er delelig med 3, fremgår heraf specielt at y ikke kan være 0.



Brikkerne kan dække et 7×7-kvadrat forsynet med krydser som vist. Da hver brik på grund af sin form højst kan dække ét kryds, må der være mindst 16 brikker, dvs. $x + y \geq 16$ og dermed

$$3x + 3y \geq 48.$$

Ved at udnytte disse to oplysninger får vi

$$y = (3x + 4y) - (3x + 3y) \leq 49 - 48 = 1.$$

Da $y \neq 0$, fås $y = 1$ som ønsket.