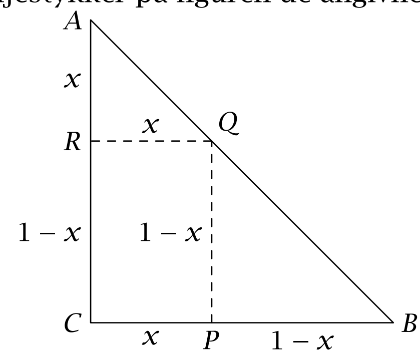
Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 1996

Opgave 1. *I trekant ABC er vinkel C ret, og de to kateter har begge længden 1. For et givet valg af punktet P på kateten BC afsættes punktet Q på hypotenusen og punktet R på den anden katete således at PQ er parallel med AC, og QR er parallel med BC. Derved opdeles trekanten i tre dele. Bestem de beliggenheder af punktet P for hvilke den rektangulære del har større areal end hver af de to andre dele.*

Løsning. Sæt $|PC| = x$. Så er $|PB| = 1 - x$. Da de små trekanter er ligebenede ligesom den store, har de andre linjestykker på figuren de angivne længder.



Betingelsen for at rektanglets areal er større end arealet af trekant ARQ, er at $x(1-x) > \frac{1}{2}x^2$, hvilket ved division med det positive tal x omskrives til $1-x > \frac{1}{2}x$ og videre til $x < \frac{2}{3}$. På helt tilsvarede måde findes (ved blot at bytte om på x og $1-x$) at betingelsen for at rektanglets areal er større end arealet af trekant BPQ, er at $1-x < \frac{2}{3}$, som er ensbetydende med $x > \frac{1}{3}$. Kravet er altså at $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$, dvs. at punktet P skal ligge på den midterste tredjedel af linjestykket BC.

Opgave 2. *Bestem alle reelle talsæt (x, y, z) som opfylder ligningssystemet*

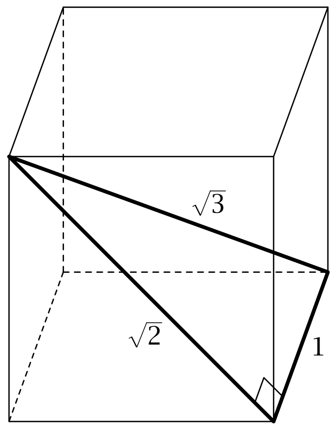
$$\begin{aligned} xy &= z \\ xz &= y \\ yz &= x. \end{aligned}$$

Løsning. Multiplikation af de tre ligninger med hinanden giver $(xyz)^2 = xyz$. Heraf følger at $xyz = 0$ eller $xyz = 1$. Hvis $xyz = 0$, er mindst et af tallene lig med 0, og det følger så af det oprindelige ligningssystem at de alle er lig med 0.

Hvis $xyz = 1$, er alle tre tal forskellige fra 0, og vi kan gange ligningerne igennem med henholdsvis z, y og x, hvorved ligningssystemet bliver ensbetydende med $x^2 = y^2 = z^2 = 1$. Så er $(x, y, z) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, hvor det negative fortegn må optræde et lige antal gange på grund af betingelsen $xyz = 1$. Samtlige løsninger til ligningssystemet er altså at finde blandt talsættene $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$. At alle disse faktisk *er* løsninger, ses ved at gøre prøve i det oprindelige ligningssystem. Hermed er den fuldstændige løsning bestemt.

Opgave 3. *Årets gaveidé fra* BABYMATH *består af en serie på ni farvede plastikbeholdere af aftagende størrelse, skiftevis af form som en terning og en kugle. Alle beholdere kan åbnes og lukkes med et praktisk hængsel, og hver beholder kan lige netop rumme den næste i rækken. Den største og mindste beholder er begge terninger. Bestem forholdet mellem disse terningers kantlængder.*

Løsning. I en terning med kantlængde 1 har diagonalen i de kvadratiske sideflader længden $\sqrt{2}$. Rumdiagonalen har da længden $\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$ (udnyt Pythagoras i en trekant bestående af en kant, en sidediagonal og en rumdiagonal).

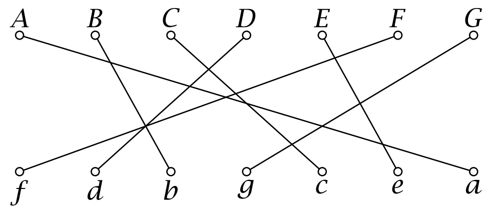


Den omskrevne kugle for en terning med kantlængde 1 har terningens rumdiagonal som diameter. Kuglens diameter er altså $\sqrt{3}$. Men diameteren i en kugle er samtidig kantlængde for kuglens omskrevne terning. Forholdet mellem kantlængderne for en terning og den næste terning i serien er dermed $\sqrt{3}$. Da der er fire terninger i alt, vil $(\sqrt{3})^4 = 3^2 = 9$ være det søgte kantlængdeforhold.

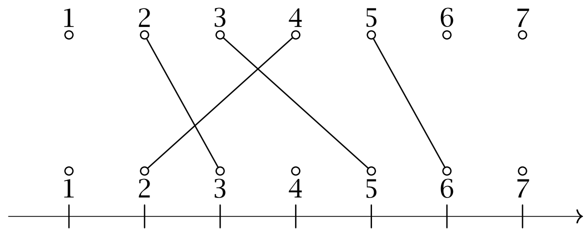
Opgave 4. *Om et naturligt tal n oplyses at tallet n^2 har 7 som næstsidste ciffer. Hvad er sidste ciffer i n^2?*

Løsning. Lad x betegne sidste ciffer i tallet n. Så kan n skrives på formen $n = 10y + x$. Dermed er $n^2 = 100y^2 + 2yx \cdot 10 + x^2$. Leddet $2yx \cdot 10$ bidrager med et lige antal tiere til tallet n^2. Da antallet af tiere i n^2 er syv, altså ulige, må x^2 levere et ulige antal tiere. Men da x^2 er et af tallene $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$, følger heraf at x^2 må være enten 16 eller 36. Tallet x^2 og dermed også tallet n^2 har altså slutcifferet 6.

Opgave 5. *I en balsal sidder syv herrer A, B, C, D, E, F og G lige over for syv damer a, b, c, d, e, f og g i en tilfældig rækkefølge. Da herrerne rejser sig og går over dansegulvet for at bukke for hver deres dame, er der en der bemærker at mindst to af herrerne tilbagelægger lige lange veje. Vil det altid være sådan? Figuren viser et eksempel. I eksemplet er $|Bb| = |Ee|$ og $|Dd| = |Cc|$.*



Løsning. Svaret er ja. Vi indlægger en x-akse parallel med de to stolerækker som vist og identificerer personernes navne med x-værdien for deres placering.



To veje er lige lange netop hvis den numeriske værdi af differensen mellem x-koordinaterne til deres endepunkter er ens. Da såvel $A, B, \ldots, G$ som $a, b, \ldots, g$ er tallene 1 til 7 i en eller anden rækkefølge, er $A + B + \cdots + G = a + b + \cdots + g$ og dermed

$$(A - a) + (B - b) + \cdots + (G - g) = 0.$$

Hvis alle de syv differenser $A - a$, $B - b$, $\ldots$, $G - g$ var forskellige numerisk set, måtte alle syv mulige numeriske differenser $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ optræde, og så ville altså summen

$$0 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6$$

være 0 for en eller anden kombination af fortegnene. Dette er imidlertid umuligt da summen – uanset hvordan fortegnene vælges – indeholder et ulige antal ulige led og derfor ikke kan være lige.