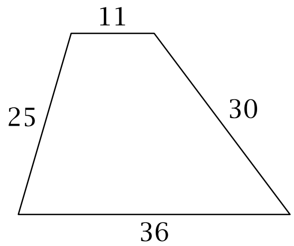
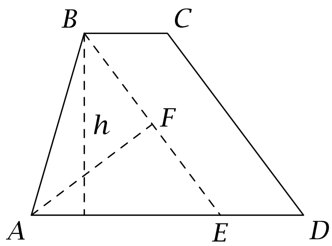
Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 1995

Opgave 1. *Et trapez har sidelængder som angivet på figuren (siderne med længde* 11 *og* 36 *er parallelle). Beregn trapezets areal.*



Løsning. På figuren er BE tegnet parallel med CD. Så er $BCDE$ et parallelogram, og dermed $|BE| = 30$ og $|ED| = 11$. Videre fås $|AE| = 36 - 11 = 25$. I den ligebenede trekant ABE findes højden AF på grundlinjen BE til 20 (udnyt Pythagoras på den retvinklede trekant AFE, hvor hypotenusen er $|AE| = 25$, og den anden katete er $|EF| = 15$).



Vi kan nu bestemme højden h i trapezet ved at udtrykke arealet af trekant ABE på to måder: $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30$, hvoraf $h = \frac{20 \cdot 30}{25} = 4 \cdot 6 = 24$. Trapezets areal er derfor $\frac{1}{2}h(11 + 36) = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (11 + 36) = 564$.

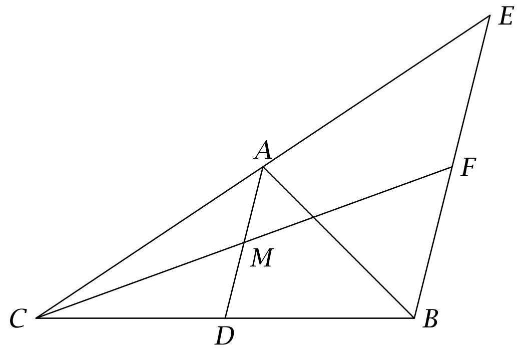
Opgave 2. *Find alle sæt af fem på hinanden følgende hele tal med den egenskab at summen af kvadraterne på de tre første tal er lig med summen af kvadraterne på de to sidste.*

Løsning. Lad n betegne det midterste af de fem tal. Så kan vi opskrive ligningen

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2.$$

Ved udregning fås $n^2 - 4n + 4 + n^2 - 2n + 1 + n^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4$, som omskrives til $n^2 - 12n = 0$, og videre til $n(n-12) = 0$. Denne ligning har løsningerne $n = 0$ og $n = 12$. De søgte talsæt er dermed $(-2, -1, 0, 1, 2)$ og $(10, 11, 12, 13, 14)$.

Opgave 3. *Fra vinkelspidsen C i trekant ABC tegnes en ret linje der halverer medianen fra A. I hvilket forhold deler denne linje siden AB?*



Løsning. Midtpunktet af BC kaldes D, og midtpunktet af medianen AD kaldes M. Gennem B tegnes en linje parallel med AD. Forlængelsen af CA skærer denne linje i E. Forlængelsen af CM skærer BE i F. Da AD bliver midtpunktstransversal i trekant CEB, er A midtpunkt af CE. Endvidere er $|AM| = |DM|$, hvorfor $|EF| = |BF|$, så F er midtpunkt af BE. Heraf følger at AB og CF er medianer i trekant CEB, hvorfor de deler hinanden i forholdet $1 : 2$.

Opgave 4. *Løs ligningen*

$$(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3,$$

hvor x er et reelt tal.

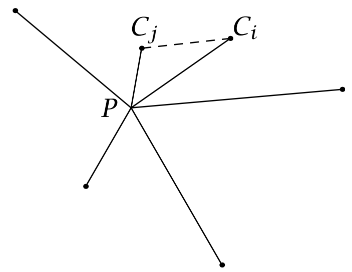
Løsning. Bemærk først at $4^x + 2^x - 6 = (4^x - 2) + (2^x - 4)$. Sætter vi $y = 2^x - 4$ og $z = 4^x - 2$, kan den oprindelige ligning herefter skrives $y^3 + z^3 = (y + z)^3$. Da udtrykket på højre side er lig med $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$, kan ligningen omskrives til $3y^2z + 3yz^2 = 0$ og videre til $yz(y + z) = 0$. Herefter udnyttes nulreglen. Første faktor er 0 for $x = 2$ (idet $y = 0$ betyder $2^x - 4 = 0$), og anden faktor er 0 for $x = \frac{1}{2}$ (idet $z = 0$ er ensbetydende med $4^x = 2$). Ved at sætte den tredje faktor lig med 0 får vi ligningen $4^x + 2^x - 6 = 0$, som kan omskrives til $(2^x)^2 + 2^x - 6 = 0$. Denne andengradsligning i 2^x løses: Diskriminanten er $1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$, hvorefter $2^x = \frac{-1 \pm 5}{2}$, dvs. $2^x = 2$ (idet den negative værdi bortfalder) og dermed $x = 1$. Alt i alt har ligningen altså de tre løsninger $\frac{1}{2}$, 1 og 2.

Opgave 5. *I planen er der givet seks cirkler således at ingen af cirklerne indeholder en andens centrum. Vis at der ikke findes et punkt som ligger i alle cirklerne.*

Løsning. Vi fører beviset ved at vise at hvis der findes et punkt der ligger inden for seks cirkler, så vil en af cirklerne indeholde en andens centrum.

Antag altså at P er et punkt der ligger i alle cirklerne. Tegn linjestykkerne der forbinder P med hvert af centrene C_1, C_2, ..., C_6 i de seks givne cirkler. Herved fremkommer seks vinkler med toppunkt i P. Summen af disse er $360°$; altså må mindst en af vinklerne $\angle C_iPC_j$ være højst $60°$.

Hvis $\angle C_iPC_j = 0°$, ligger C_i på linjestykket PC_j eller C_j på linjestykket PC_i, og dermed ligger C_i i den j'te cirkel eller C_j i den i'te.



I tilfældet $0° < \angle C_iPC_j \leq 60°$ ses på trekant C_iPC_j. Da vinkelsummen i en trekant er $180°$, er mindst en af de øvrige vinkler PC_iC_j og PC_jC_i i denne trekant mindst $60°$. Men så er C_iC_j mindre end eller lig med mindst et af linjestykkerne PC_j og PC_i. Disse er igen mindre end eller lig med radius i henholdsvis den j'te og den i'te cirkel da P lå i alle cirklerne. Dermed er C_iC_j mindre end eller lig med mindst en af disse radier, hvoraf følger at C_i ligger i den j'te cirkel eller C_j i den i'te. Hermed er beviset ført i alle tilfælde.