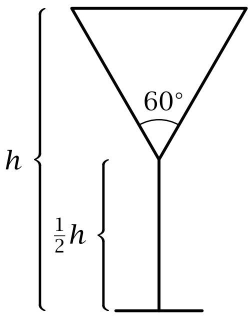
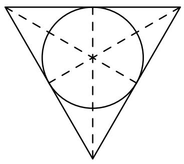
Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 1994

Opgave 1. *Et vinglas med et tværsnit som vist har den egenskab at en appelsin af form som en kugle med radius* 3 cm *lige netop kan anbringes i glasset uden at rage op over glasset. Bestem højden h af glasset.*



Løsning. På figuren nedenfor ses et tværsnit af situationen. Højderne i den ligesidede trekant er også vinkelhalveringslinjer og skærer derfor hinanden i den indskrevne cirkels centrum. Endvidere er de medianer og deler derfor hinanden i forholdet $1 : 2$. Da den indskrevne cirkel har radius 3 cm, har medianerne dermed længden 9 cm. Glassets samlede højde er altså 18 cm.



Opgave 2. *Et tog gennemkører en bestemt strækning med en konstant fart. Hvis farten sættes op med* 10 *kilometer i timen, kan turen gøres* 40 *minutter hurtigere. Hvis farten derimod sættes ned med* 10 *kilometer i timen, tager turen* 1 *time længere. Hvor lang er den gennemkørte strækning?*

Løsning. Kaldes farten (målt i kilometer i timen) for v, strækningen (målt i kilometer) for s og tiden (målt i timer) for t, får vi følgende tre relationer:

$$\begin{aligned} s &= tv, \\ s &= (t - \tfrac{2}{3})(v + 10), \\ s &= (t + 1)(v - 10). \end{aligned}$$

Ved at gange parenteserne ud og erstatte s med tv kan vi omskrive de to sidste ligninger til

$$\begin{aligned} 10t - \frac{2}{3}v &= \frac{20}{3}, \\ -10t + v &= 10. \end{aligned}$$

Dette ligningssystem løses: Ved addition af de to ligninger fås $\frac{1}{3}v = \frac{50}{3}$, altså $v = 50$, og derefter findes t vha. den nederste ligning til $t = 4$. Den gennemkørte strækning er dermed $4 \cdot 50 = 200$ kilometer.

Opgave 3. *Tredjegradspolynomiet $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ har de tre rødder a, b og c. Angiv et tredjegradspolynomium med rødderne $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ og $\frac{1}{c}$.*

Løsning. Bemærk at a, b og c ikke er 0 da 0 ikke er rod i P. Polynomiet

$$Q(x) = 1 + 2x - 3x^2 - 5x^3$$

opfylder det ønskede. For $x \neq 0$ gælder nemlig

$$Q\Big(\frac{1}{x}\Big) = 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} = \frac{1}{x^3}(x^3 + 2x^2 - 3x - 5) = \frac{1}{x^3}P(x),$$

og dermed som ønsket

$$Q\Big(\frac{1}{r}\Big) = \frac{1}{r^3}P(r) = 0$$

for hver af rødderne $r = a$, $r = b$ og $r = c$ i $P(x)$.

Opgave 4. *I en retvinklet trekant hvori alle sidelængder er hele tal, har den ene katete længden* 1994*. Bestem længden af hypotenusen.*

Løsning. Kaldes den ukendte katete a og hypotenusen c, gælder

$$1994^2 = c^2 - a^2 = (c - a)(c + a).$$

Bemærk at tallene $c + a$ og $c - a$ begge er lige (da deres produkt er lige, er nemlig mindst et af dem lige, og da deres differens $(c + a) - (c - a) = 2a$ er lige, må det andet også være det). Ved division med 2^2 fås

$$997^2 = \frac{c - a}{2} \cdot \frac{c + a}{2},$$

hvor faktorerne på højre side er hele tal, og den første faktor er mindre end den anden. Da 997 er et primtal, er $1 \cdot 997^2$ den eneste mulige opspaltning som et produkt af den ønskede art. Vi får altså

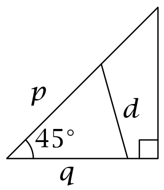
$$\begin{aligned} \frac{c - a}{2} &= 1, \\ \frac{c + a}{2} &= 997^2, \end{aligned}$$

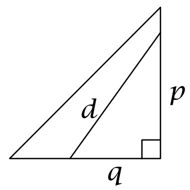
hvoraf ved addition

$$\begin{aligned} c &= 1 + 997^2 \\ &= 1 + (1000 - 3)^2 \\ &= 1 + 1000000 + 9 - 6000 \\ &= 994010. \end{aligned}$$

Opgave 5. *I en retvinklet og ligebenet trekant har de to kateter begge længden* 1. *Find længden af det korteste linjestykke der deler trekanten i to figurer med samme areal, og angiv dette linjestykkes placering.*

Løsning. Længden af det delende linjestykke betegnes d. Ved deling afskæres en trekant med arealet $\frac{1}{4}$. Vi ser først på det tilfælde hvor trekanten indeholder en af de oprindelige vinkler på 45°.





Når siderne betegnes p og q, er arealet $\frac{1}{2}pq\sin(45^\circ) = \frac{1}{4}$, hvoraf det ses at $2pq = \sqrt{2}$ (udnyt at $\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Med cosinusrelationen fås nu

$$\begin{aligned} d^2 &= p^2 + q^2 - 2pq\cos(45^\circ) \\ &= p^2 + q^2 - 1 \\ &= (p-q)^2 + 2pq - 1 \\ &= (p-q)^2 + \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

Dette udtryk er minimalt for $p = q$. Den afklippede trekant skal altså være ligebenet, og længden af det delende linjestykke bliver

$$d = \sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Vi mangler at vise at denne længde ikke kan gøres mindre i det tilfælde hvor den afskårne trekant indeholder den rette vinkel. I det tilfælde gås frem på tilsvarende måde: Med sidebetegnelserne p og q er den afskårnes trekants areal $\frac{1}{2}pq = \frac{1}{4}$, så at $pq = \frac{1}{2}$, og med Pythagoras fås

$$d^2 = p^2 + q^2 = p^2 + q^2 - 2pq + 2pq = (p-q)^2 + 1.$$

Den minimale værdi af d i det retvinklede tilfælde bliver dermed 1, altså større end den ovenfor fundne værdi.