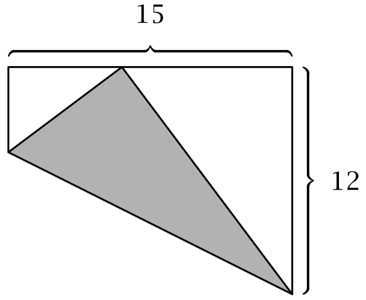
# Georg Mohr-Konkurrencen

## Løsninger · 1993

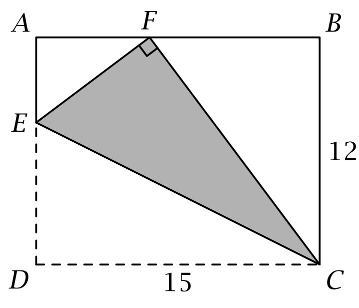
**Opgave 1.** *Tre kammerater $A$, $B$ og $C$ har tilsammen 120 kroner. Først giver $A$ lige så mange penge til $B$ som $B$ har i forvejen. Dernæst giver $B$ lige så mange penge til $C$ som $C$ har i forvejen. Til sidst giver $C$ lige så mange penge til $A$ som $A$ nu har. Efter disse transaktioner har $A$, $B$ og $C$ lige mange penge. Hvor mange penge havde hver af de tre kammerater oprindelig?*

**Løsning.** Oprindelig har $A$, $B$ og $C$ henholdsvis $a$, $b$ og $c$ kroner. Fordelingen $(a,b,c)$ ændres først til $(a-b, 2b, c)$, dernæst til $(a-b, 2b-c, 2c)$ og sluttelig til $(2(a-b), 2b-c, 2c-(a-b))$. Til slut har $A$, $B$ og $C$ lige mange penge, dvs. 40 kroner hver. Altså er $2(a-b) = 40$, $2b-c = 40$ og $2c-(a-b) = 40$, hvoraf $a-b = 20$, $c = \frac{1}{2}(40+(a-b)) = 30$, $b = \frac{1}{2}(40+c) = 35$ og $a = b+20 = 55$.

**Opgave 2.** *Et rektangulært stykke papir har sidelængderne 12 og 15. Et hjørne bukkes om som vist på figuren. Bestem arealet af den grå trekant.*




**Løsning.** Med figurens betegnelser gælder $|FC| = |DC| = 15$. Med Pythagoras udregnes $|FB| = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$, og dermed bliver $|AF| = 15 - 9 = 6$. De to retvinklede trekanter $EFA$ og $FCB$ er ensvinklede; der gælder nemlig $\angle AFE = 90° - \angle BFC$ (se på vinklerne omkring $F$) og $\angle FCB = 90° - \angle BFC$ (udnyt vinkelsum i trekant $FCB$), altså $\angle AFE = \angle FCB$. Da trekanterne $EFA$ og $FCB$ er ensvinklede med sideforholdet $6:12 = 1:2$, er $|EF| = \frac{1}{2} \cdot 15$. Det søgte areal bliver da $\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot 15 = \frac{225}{4}$.



**Opgave 3.** *Bestem samtlige reelle løsninger* $(x, y)$ *til ligningssystemet*

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x^6 + y^6 = \frac{7}{16}.$$

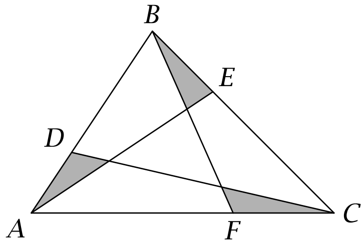
**Løsning.** Ved indsættelse af $y^2 = 1 - x^2$ i den nederste ligning fås

$$x^6 + (1 - x^2)^3 = \frac{7}{16},$$

som kan omskrives til $x^6 + 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 = \frac{7}{16}$. Ved at samle leddene og dividere igennem med 3 fås $x^4 - x^2 + \frac{3}{16} = 0$. Denne ligning betragtes som en andengradsligning i $x^2$ med diskriminanten $1 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{4}$. Så er $x^2 = \frac{1+\sqrt{1/4}}{2} = \frac{3}{4}$ eller $x^2 = \frac{1-\sqrt{1/4}}{2} = \frac{1}{4}$, hvortil svarer henholdsvis $y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ og $y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Dermed fås i alt følgende otte løsninger:

$$\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad \left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\right), \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\right).$$

**Opgave 4.** *I trekant $ABC$ afskærer punkterne $D$, $E$ og $F$ en tredjedel af de respektive sider. Vis at summen af arealerne af de tre grå trekanter er lig med arealet af midtertrekanten.*




**Løsning.** Lad $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_M$ og $T$ betegne arealerne af henholdsvis hver af de grå trekanter, midtertrekanten og hele trekant $ABC$. Betragt nu trekanterne $ABE$, $BCF$ og $CAD$. Hver af disse har et areal på en tredjedel af hele trekantens areal (da deres grundlinje er en tredjedel af hele trekantens grundlinje). Da trekanterne delvis overlapper hinanden, bliver arealet af deres foreningsmængde (dvs. arealet af hele trekant $ABC$ bortset fra midtertrekanten) $3 \cdot \frac{1}{3}T - (T_1 + T_2 + T_3)$, altså $T - (T_1 + T_2 + T_3)$. På den anden side har den nævnte foreningsmængde naturligvis arealet $T - T_M$. Altså fås $T_M = T_1 + T_2 + T_3$ som ønsket.

**Opgave 5.** *I en papkasse ligger et stort antal løse sokker. Nogle af sokkerne er røde; de øvrige er blå. Det oplyses at det samlede antal sokker ikke overstiger* 1993*. Endvidere oplyses det at sandsynligheden for at trække to sokker af samme farve når man på tilfældig måde udtrækker to sokker fra kassen, er* $\frac{1}{2}$*. Hvad er efter de foreliggende oplysninger det største antal røde sokker der kan befinde sig i kassen?*

**Løsning.** Med $n$ betegnes det samlede antal sokker, med $r$ antallet af røde sokker. Man kan trække to sokker ud af $n$ på i alt

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

måder. Man kan trække to sokker af forskellig farve på i alt $r(n-r)$ måder. Sandsynligheden for at trække to sokker af forskellig farve er dermed

$$\frac{r(n-r)}{n(n-1)/2} = \frac{2r(n-r)}{n(n-1)}.$$

Den opgivne betingelse er ensbetydende med at denne sandsynlighed er $\frac{1}{2}$, altså at $\frac{2r(n-r)}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$. Dette kan omskrives til $4rn - 4r^2 = n^2 - n$ eller

$$4r^2 - 4nr + (n^2 - n) = 0.$$

Denne andengradsligning i $r$ har diskriminanten $16n^2 - 4 \cdot 4(n^2 - n) = 16n$, og dermed er

$$r = \frac{4n \pm 4\sqrt{n}}{8} = \frac{n \pm \sqrt{n}}{2}.$$

Da $r$ er et helt tal, må $n$ være et kvadrattal. Den størst mulige værdi for $r$ fremkommer når kvadrattallet $n$ er så stort som muligt. Da $44^2 = 1936 \le 1993$, mens $45^2 > 1993$, er $n = 44^2$ den største brugbare værdi, og den søgte størst mulige værdi af $r$ er da $r = \frac{1}{2}(44^2 + 44) = 990$.